Calcolo delle probabilità (ESEMPI)

LA PROBABILITÀ È UNA DESCRIZIONE NUMERICA DELLA POSSIBILITÀ CHE UN EVENTO SI VERIFICHI O MENO.
CONSIDERANDO LA DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITÀ SI HA CHE:

$$P(E) = \frac{\text{NUMERO DI CASI FAVOREVOLI}}{\text{NUMERO DI CASI POSSIBILI}}$$

DOVE

E: RAPPRESENTA UN EVENTO

P(E): È LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI L'EVENTO

PROPRIETÀ

ESSENDO IL NUMERO DI CASI FAVOREVOLI MINORE O AL MASSIMO UGUALE AL NUMERO DI CASI POSSIBILI, VA DA SÉ CHE LA PROBABILITÀ È UN NUMERO COMPRESO TRA 0 ED 1, QUINDI:

$$\boxed{0 \leq P(E) \leq 1}$$

E

$$\boxed{P(E) = 0 \quad \text{EVENTO IMPOSSIBILE}}$$

$$\boxed{P(E) = 1 \quad \text{EVENTO CERTO}}$$

INDICANDO CON $\bar{E}$ LA NEGAZIONE DELL'EVENTO E I DUE EVENTI SI DICONO COMPLEMENTARI E VALE LA RELAZIONE:

$$\boxed{P(E) + P(\bar{E}) = 1}$$

ESEMPIO

CONSIDERANDO IL LANCIO DI UN DADO REGOLARE NON TRUCCATO, DETERMINARE LA PROBABILITÀ DEI

Calcolo delle probabilità (ESEMPI)

SEGUENTI EVENTI:

E_1: ESCE IL NUMERO 5

E_2: ESCE UN NUMERO PARI

E_3: ESCE IL NUMERO 8

E_4: ESCE UN NUMERO COMPRESO TRA 1 E 6

$$\boxed{P(E_1)=\frac{1}{6}=0,1\overline{6}}$$

$$\boxed{P(E_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5}$$

$$\boxed{P(E_3)=\frac{0}{6}=0}$$

$$\boxed{P(E_4)=\frac{6}{6}=1}$$

CONSIDERANDO $\bar{E}_2$ SI HA L'EVENTO "ESCE UN NUMERO DISPARI"

E:

$$\boxed{P(E_2)+P(\bar{E}_2)=1}$$

TIPI DI EVENTI

DUE O PIÙ EVENTI SI DICONO INCOMPATIBILI QUANDO IL VERIFICARSI DI UNO ESCLUDE IL VERIFICARSI DEGLI ALTRI.

ESEMPIO

CONSIDERANDO IL LANCIO DI UNA MONETA REGOLARE NON TRUCCATA I DUE EVENTI:

E_1: ESCE TESTA

E_2: ESCE CROCE

SONO INCOMPATIBILI PERCHÉ SE SI VERIFICA E_1 NON SI PUÒ VERIFICARE E_2.

Calcolo delle probabilità (ESEMPI)

DUE O PIÙ EVENTI SI DICONO COMPATIBILI SE IL VERIFICARSI DI UNO NON ESCLUDE IL VERIFICARSI DEGLI ALTRI_

ESEMPIO

CONSIDERANDO IL LANCIO CONTEMPORANEO DI DUE DADI REGOLARI NON TRUCCATI I DUE EVENTI:

E_1: ESCE IL NUMERO 5 SU UNO DEI DUE DADI

E_2: ESCE IL NUMERO 1 SULL'ALTRO DADO

SONO COMPATIBILI PERCHÉ SE SI VERIFICA E_1 SI PUÒ VERIFICARE ANCHE E_2_

GLI EVENTI COMPATIBILI A LORO VOLTA SI DIVIDONO IN EVENTI INDIPENDENTI ED EVENTI DIPENDENTI_

DUE O PIÙ EVENTI SI DICONO INDIPENDENTI QUANDO IL VERIFICARSI DI UNO NON MODIFICA LA PROBABILITÀ DI VERIFICARSI DEGLI ALTRI_

DUE O PIÙ EVENTI SI DICONO DIPENDENTI QUANDO IL VERIFICARSI DI UNO MODIFICA LA PROBABILITÀ DI VERIFICARSI DEGLI ALTRI_

ESEMPIO

CONSIDERANDO L'ESTRAZIONE CONSECUTIVA DI DUE CARTE DA UN MAZZO REGOLARE NON TRUCCATO DI 40 CARTE E CONSIDERANDO I DUE EVENTI:

E_1: SI ESTRAE UNA CARTA DI DENARI

E_2: SI ESTRAE UNA FIGURA

SE DOPO L'ESTRAZIONE LA PRIMA CARTA VIENE MESSA NUOVAMENTE NEL MAZZO I DUE EVENTI E_1 ED E_2 SONO INDIPENDENTI, PERCHÉ LA PROBABILITÀ DI E_2 NON

Calcolo delle probabilità (ESEMPI)

CAMBIA, CIOÈ:

$$P(E_2) = \frac{12 \text{ POSSIBILI FIGURE}}{40 \text{ CARTE TOTALI}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

SE DOPO L'ESTRAZIONE LA PRIMA CARTA NON VIENE REIMMESSA NEL MAZZO GLI EVENTI E_1 ED E_2 SONO DIPENDENTI PERCHÉ LA PROBABILITÀ DI E_2 CAMBIA E CIOÈ

1- SE LA PRIMA CARTA È UNA FIGURA

$$P(E_2) = \frac{11 \text{ POSSIBILI FIGURE}}{39 \text{ CARTE TOTALI}} \cong 0{,}28$$

2- SE LA PRIMA CARTA NON È UNA FIGURA

$$P(E_2) = \frac{12 \text{ POSSIBILI FIGURE}}{39 \text{ CARTE TOTALI}} \cong 0{,}31$$

PROBABILITÀ TOTALE DI 2 O PIÙ EVENTI

CON PROBABILITÀ TOTALE DI 2 O PIÙ EVENTI SI INTENDE LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI UNO SOLO DEGLI EVENTI CONSIDERATI, E SI INDICA CON:

$$P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } E_3 \text{ o} \cdots \text{o } E_n)$$

PER IL SUO CALCOLO BISOGNA DISTINGUERE TRA EVENTI COMPATIBILI ED INCOMPATIBILI

PROBABILITÀ TOTALE DI 2 O PIÙ EVENTI INCOMPATIBILI

CONSIDERANDO n EVENTI INCOMPATIBILI

$$E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots, E_n$$

LA PROBABILITÀ TOTALE È

$$\boxed{P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } E_3 \text{ o} \cdots \text{o } E_n) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots + P(E_n)}$$

Calcolo delle probabilità (ESEMPI)

CIOÈ LA PROBABILITÀ TOTALE DI 2 O PIÙ EVENTI INCOMPATIBILI È UGUALE ALLA SOMMA DELLE PROBABILITÀ DEI SINGOLI EVENTI.

ESEMPIO

CONSIDERANDO IL LANCIO DI UN DADO REGOLARE NON TRUCCATO E I 2 EVENTI:

E_1: ESCE IL NUMERO 5

E_2: ESCE UN NUMERO PARI

$$P(E_1 \text{ O } E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6\overline{6}$$

PROBABILITÀ TOTALE DI 2 O PIÙ EVENTI COMPATIBILI

CONSIDERANDO 2 EVENTI COMPATIBILI E_1 ED E_2 LA PROBABILITÀ TOTALE È:

$$\boxed{P(E_1 \text{ O } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ e } E_2)}$$

DOVE $P(E_1 \text{ e } E_2)$ È LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO CONTEMPORANEAMENTE I 2 EVENTI.

QUINDI LA PROBABILITÀ TOTALE DI 2 O PIÙ EVENTI COMPATIBILI È UGUALE ALLA SOMMA DELLE PROBABILITÀ DEI SINGOLI EVENTI MENO LA PROBABILITÀ CHE GLI EVENTI SI VERIFICHINO CONTEMPORANEAMENTE.

ESEMPIO

CONSIDERANDO IL LANCIO DI UN DADO REGOLARE NON TRUCCATO E I 2 EVENTI:

E_1: ESCE IL NUMERO 5

E_2: ESCE UN NUMERO DISPARI

$$P(E_1 \text{ O } E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - P(E_1 \text{ e } E_2)$$

Calcolo delle probabilità (ESEMPI)

DOVE $P(E_1 e E_2)$ È LA PROBABILITÀ COMPOSTA DI 2 EVENTI DIPENDENTI PERCHÉ SE E_1 SI VERIFICA, SI VERIFICA DI CONSEGUENZA ANCHE E_2 (2 È UN NUMERO PARI!), QUINDI È UGUALE ALLA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICA E_1 MOLTIPLICATA LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICA E_2 CONDIZIONATA DAL VERIFICARSI DI E_1, E CIOÈ:

$$P(E_1 e E_2) = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

COSÌ

$$\boxed{P(E_1 o E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5}$$

PROBABILITÀ COMPOSTA DI 2 O PIÙ EVENTI

CON PROBABILITÀ COMPOSTA DI 2 O PIÙ EVENTI SI INTENDE LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO CONTEMPORANEAMENTE TUTTI GLI EVENTI CONSIDERATI, E SI INDICA CON:

$$P(E_1 e E_2 e E_3 e \cdots e E_n)$$

NEL CASO DI EVENTI INCOMPATIBILI LA PROBABILITÀ COMPOSTA **È NULLA**.

NEL CASO DI EVENTI COMPATIBILI BISOGNA DISTINGUERE TRA EVENTI INDIPENDENTI ED EVENTI DIPENDENTI.

PROBABILITÀ COMPOSTA DI 2 O PIÙ EVENTI INDIPENDENTI

CONSIDERANDO n EVENTI COMPATIBILI INDIPENDENTI

$$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$$

LA PROBABILITÀ COMPOSTA È

$$\boxed{P(E_1 e E_2 e E_3 e \cdots e E_n) = P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3) \times \cdots \times P(E_n)}$$

CIOÈ LA PROBABILITÀ COMPOSTA DI 2 o PIÙ EVENTI COMPATIBILI INDIPENDENTI È UGUALE AL PRODOTTO DELLE PROBABILITÀ DEI SINGOLI EVENTI.

ESEMPIO

CONSIDERANDO L'ESTRAZIONE CONSECUTIVA DI DUE CARTE DA UN MAZZO REGOLARE NON TRUCCATO DI 40 CARTE E CONSIDERANDO I DUE EVENTI:

E_1: SI ESTRAE UNA CARTA DI DENARI

E_2: SI ESTRAE UNA FIGURA

SE DOPO L'ESTRAZIONE LA PRIMA CARTA VIENE MESSA NUOVAMENTE NEL MAZZO I DUE EVENTI E_1 ED E_2 SONO INDIPENDENTI PERCHÉ LA PROBABILITÀ DI E_2 NON CAMBIA, E LA PROBABILITÀ COMPOSTA DEI 2 EVENTI CIOÈ LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO ENTRAMBI GLI EVENTI È:

$$\boxed{P(E_1 e E_2) = \frac{10}{40} \times \frac{12}{40} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40} \simeq 0{,}08}$$

PROBABILITÀ COMPOSTA DI 2 o PIÙ EVENTI DIPENDENTI

CONSIDERANDO 2 EVENTI COMPATIBILI DIPENDENTI E_1 ED E_2, LA PROBABILITÀ COMPOSTA È:

$$\boxed{P(E_1 e E_2) = P(E_1) \times P(E_2 | E_1)}$$

DOVE

$$P(E_2 | E_1)$$

È LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA DI E_2 AL VERIFICARSI DI E_1, CIOÈ LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI E_2 UNA VOLTA VERIFICATOSI E_1.

ESEMPIO

CONSIDERANDO L'ESTRAZIONE CONSECUTIVA DI DUE CARTE DA UN MAZZO REGOLARE NON TRUCCATO DI 40 CARTE E CONSIDERANDO I DUE EVENTI:

E_1: SI ESTRAE UNA CARTA DI DENARI

E_2: SI ESTRAE UNA FIGURA

SE DOPO L'ESTRAZIONE LA PRIMA CARTA NON VIENE REIMMESSA NEL MAZZO I DUE EVENTI E_1 ED E_2 SONO DIPENDENTI PERCHÉ LA PROBABILITÀ DI E_2 CAMBIA, E LA PROBABILITÀ COMPOSTA DEI 2 EVENTI, CIOÈ LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO ENTRAMBI GLI EVENTI È:

$$\boxed{P(E_1 \text{ e } E_2) = \frac{10}{40} \times \frac{12}{39} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{13} \cong 0{,}07}$$

DEFINIZIONE FREQUENTISTA DI PROBABILITÀ

CONSIDERANDO UN EVENTO CHE SI RIPETE UN GRANDE NUMERO DI VOLTE NELLE STESSE CONDIZIONI (AD ESEMPIO LA RIPETIZIONE DI UN ESPERIMENTO PER UN GRANDE NUMERO DI VOLTE...), LA PROBABILITÀ FREQUENTISTA CHE L'EVENTO SI VERIFICA È IL RAPPORTO TRA IL NUMERO DI VOLTE CHE L'EVENTO SI È VERIFICATO ED IL NUMERO DI PROVE EFFETTUATE, CIOÈ:

$$\boxed{f(E) = \frac{\text{NUMERO DI VOLTE CHE L'EVENTO SI È VERIFICATO}}{\text{NUMERO DI PROVE EFFETTUATE}}}$$

DOVE $f(E)$ È DETTA **FREQUENZA RELATIVA DELL'EVENTO**.

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE UN NEONATO SIA MASCHIO SAPENDO CHE SU 100'000 NASCITE SI SONO AVUTE 48500 MASCHI, CIOÈ:

E: PROSSIMO NEONATO MASCHIO

$$\boxed{f(E) = \frac{48'500}{100'000} = \frac{485}{1000} = 0{,}485}$$

CIOÈ LA PROBABILITÀ CHE IL PROSSIMO NEONATO SIA MASCHIO È CIRCA IL 48%.

PROPRIETÀ

$\boxed{0 \leq f(E) \leq 1}$ È UN VALORE SEMPRE COMPRESO TRA 0 E 1

$\boxed{f(E) = 0}$ NON È IMPOSSIBILE MA SIGNIFICA CHE L'EVENTO E NON SI È MAI VERIFICATO

$\boxed{f(E) = 1}$ NON È CERTO MA SIGNIFICA CHE SI È SEMPRE VERIFICATO

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

AL CRESCERE DEL NUMERO DI PROVE EFFETTUATE LA PROBABILITÀ FREQUENTISTA DI UN EVENTO SI AVVICINA SEMPRE PIÙ ALLA SUA PROBABILITÀ CLASSICA.

QUESTA LEGGE È DETTA ANCHE LEGGE EMPIRICA DEL CASO, E STABILISCE UNA RELAZIONE TRA LA DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITÀ E QUELLA FREQUENTISTA.

NATURALMENTE TANTO È PIÙ GRANDE IL NUMERO DELLE PROVE TANTO PIÙ IL VALORE DELLE DUE PROBABILITÀ SI AVVICINA.