

Costi di produzione

QUANDO UN'AZIENDA PRODUCE UN CERTO BENE, SOSTIENE DIVERSI TIPI DI SPESE CHE GENERALMENTE SI DIVIDONO IN **COSTI FISSI** CHE NON DIPENDONO DALLA QUANTITÀ PRODOTTA (COME AD ESEMPIO AFFITTO O CONSUMI DI ENERGIA ELETTRICA), **COSTI VARIABILI PROPORZIONALI** ALLA QUANTITÀ PRODOTTA (COME AD ESEMPIO L'ACQUISTO DELLE MATERIE PRIME) E **COSTI VARIABILI NON PROPORZIONALI** (COME AD ESEMPIO I SALARI DELLE DIPENDENZE) - DI CONSEGUENZA SE CONSIDERIAMO IL **COSTO TOTALE** COME LA SOMMA DEI COSTI FISSI E DI QUELLI VARIABILI, QUESTO PUÒ ESSERE VISTO COME FUNZIONE DELLA QUANTITÀ DI BENE PRODOTTA, COSÌ SE

C_f COSTI FISSI

$C_v(x)$ COSTI VARIABILI PER LA QUANTITÀ x

ALLORA DEFINIAMO

$$C(x): y = C_v(x) + C_f \text{ CON } x \geq 0$$

LA **FUNZIONE DI COSTO TOTALE**, CHE È UNA FUNZIONE CRESCENTE DELLA QUANTITÀ x PUÒ ESSERE ESPRESSA DA DIVERSI TIPI DI RELAZIONI:

1-FUNZIONE DI PRIMO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

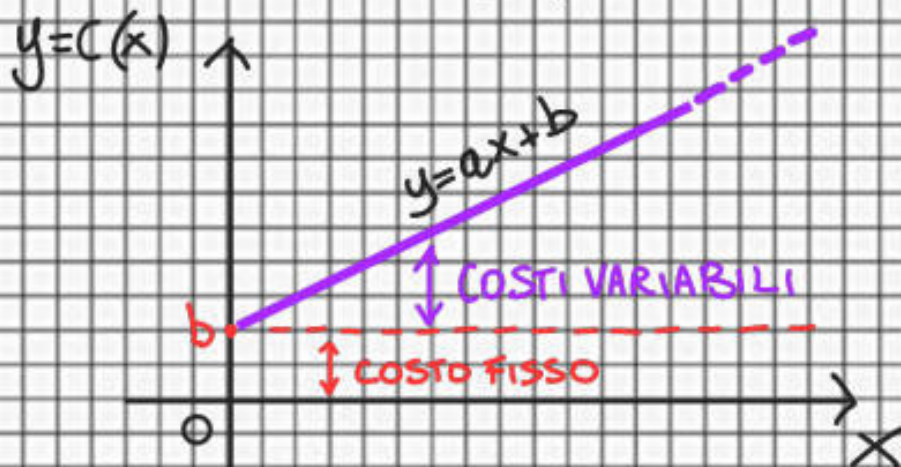
$$y = ax + b$$

CON

$a, b > 0$ QUANTITÀ POSITIVE

Costi di produzione

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax \quad \text{E} \quad C_f = b$$

2-FUNZIONE DI SECONDO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

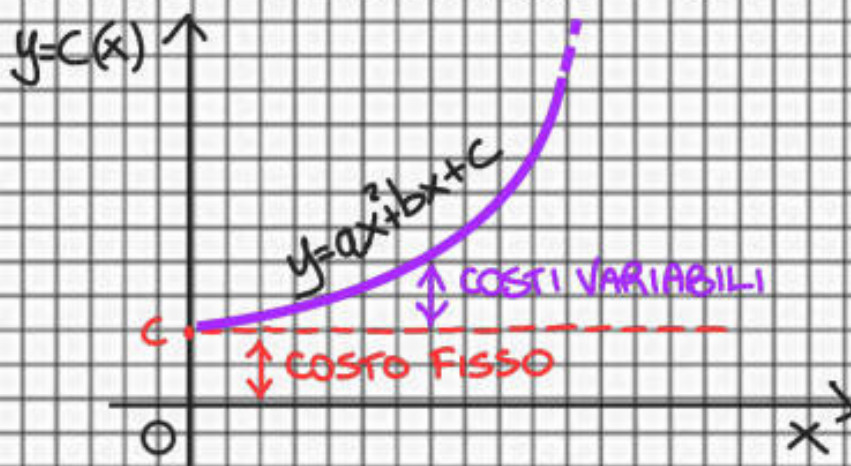
$$y = ax^2 + bx + c$$

CON

$a > 0$ QUANTITÀ POSITIVA

$b, c \geq 0$ QUANTITÀ NON NEGATIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



Costi di produzione

CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax^2 + bx \quad \text{E} \quad C_f = c$$

3-FUNZIONE DI TERZO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

CON

$a > 0$ QUANTITÀ POSITIVA

$b, c, d \geq 0$ QUANTITÀ NON NEGATIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \text{E} \quad C_f = d$$

Costi di produzione

4-FUNZIONE ESPONENZIALE

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

$$y = a e^{bx}$$

CON

$a, b > 0$ QUANTITÀ POSITIVE

ED e NUMERO DI NEPERO (CIRCA PARI A 2,71)

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = e^{bx} \quad \text{E} \quad C_f = a$$

QUALUNQUE SIA LA RELAZIONE CHE ESPRIME IL COSTO TOTALE, QUANDO LA QUANTITÀ È NULLA CIOÈ

$$x = 0$$

IL COSTO TOTALE RAPPRESENTA SEMPRE E SOLO L'IMPORTO DEI COSTI FISSI, CIOÈ

$$y = C(0) = C_f$$

Costi di produzione

ESEMPIO

LA RELAZIONE CHE RAPPRESENTA I COSTI FISSI DI UN'AZIENDA NEL PRODURRE UN CERTO BENE È RAPPRESENTATA DALLA SEGUENTE FUNZIONE

$$y = x^3 - 60x^2 + 1500x + 10000$$

DOVE NATURALMENTE x È LA QUANTITÀ DI BENE PRODOTTA.

RAPPRESENTIAMO GRAFICAMENTE LA FUNZIONE. PER IL SUO STUDIO SI CONSIDERA SOLO IL PRIMO QUADRANTE DEL PIANO CARTESIANO IN CUI $x > 0$ ED $y > 0$.

POI SE $x = 0$ SI HA CHE $y = 10000$ CIOÈ L'IMPORTO DEI COSTI FISSI.

CALCOLIAMO LA DERIVATA PRIMA

$$y' = 3x^2 - 120x + 1500$$

E VERIFICHIAMO CHE SIA SEMPRE POSITIVA A CONFERTA CHE LA FUNZIONE È CRESCENTE:

$$3x^2 - 120x + 1500 = 0 \Rightarrow x^2 - 40x + 500 = 0$$

$$\Delta = (-40)^2 - 4(1)(500) = 1600 - 2000 = -400 < 0$$

ED ESSENDO IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 2° GRADO POSITIVO, ALLORA

$$y' > 0 \text{ PER OGNI } x$$

CALCOLIAMO LA DERIVATA SECONDA

Costi di produzione

$$y'' = 6x - 120$$

CHE SI ANNULLA IN

$$6x - 120 = 0$$

DOVE

$$x = 20$$

$$y = C(20) = 24'000$$

ED È POSITIVA IN

$$6x - 120 > 0$$

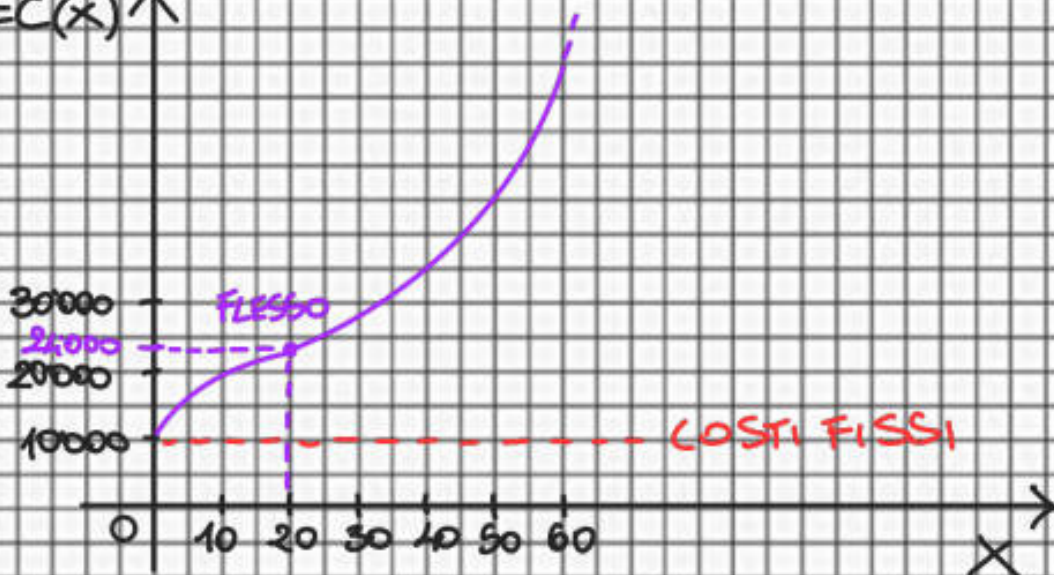
CIOÈ

$$x > 20$$

IL CHE SIGNIFICA CHE IN $x=20$ LA CURVA DELLA FUNZIONE HA UN PUNTO DI FLESSO.

PROVIAMO ALLORA A TRACCIARE IL GRAFICO:

$$y = C(x) \uparrow$$



E POSSIAMO NOTARE CHE NEL PUNTO $(20, 24'000)$ C'È UN CAMBIAMENTO DI CONCAVITÀ DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE (FLESSO).

Costi di produzione

COSTO MEDIO O UNITARIO

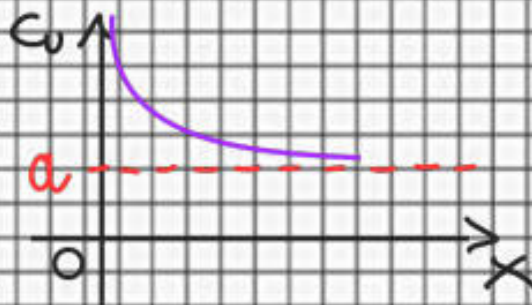
FACENDO UN'ANALISI DEI COSTI DI PRODUZIONE SI DEFINISCE COSTO MEDIO O UNITARIO UN'ALTRA FUNZIONE, COME IL RAPPORTO TRA IL COSTO TOTALE E LA QUANTITÀ X PRODOTTA

$$C_v: y = \frac{C(x)}{x} \quad \text{CON } x > 0$$

NEL CASO IN CUI LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È DI PRIMO GRADO

$$C_v: y = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x} \quad \text{CON } x > 0, a, b > 0$$

CHE È UN RAMO DI UN'IPERBOLE EQUILATERA DI ASINTOTI $x=0$ E $y=a$, SEMPRE DECRESCENTE FINO AD UN VALORE MINIMO (a):



MENTRE NEL CASO IL COSTO TOTALE È UNA FUNZIONE DI 2° GRADO

$$C_v: y = \frac{ax^2+bx+c}{x} = ax + b + \frac{c}{x} \quad \text{CON } x > 0, a, b, c > 0$$

CHE È UN RAMO DI UN'IPERBOLE NON EQUILATERA DI ASINTOTI $x=0$ E $y=ax+b$:

Costi di produzione



CHE È DECRESCENTE FINO AD UN VALORE MINIMO E POI È CRESCENTE.

OSSERVAZIONE:

IN GENERALE LE CURVE DEL COSTO UNITARIO HANNO UN PUNTO DI MINIMO COSTO DOVUTO ALLA PRESENZA DEI COSTI FISSI.

IL VALORE DI MINIMO COSTO UNITARIO NEI MERCATI È DETTO **PUNTO DI FUGA** PERCHÉ SE IL PREZZO DI VENDITA FOSSE INFERIORE A QUEL VALORE SI ANDREBBE IN PERDITA E L'AZIENDA PRODUTTRICE DOVREBBE LASCIARE IL MERCATO.

ESEMPIO

I COSTI SOSTENUTI MENSILMENTE DA UNA AZIENDA SONO

- $C_f = €10.000$
- COSTO PER OGNI UNITÀ PRODOTTA €16
- COSTI DI MANUTENZIONE IMPIANTI PARI AL 4% DEL QUADRATO DEL NUMERO DI UNITÀ PRODOTTE

Costi di produzione

- a) DETERMINARE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE
- b) DETERMINARE LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO O UNITARIO
- c) DETERMINARE LA QUANTITÀ PRODOTTA PER LA QUALE IL COSTO UNITARIO È MINIMO.

a) LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È

$$C(x): y = C_v(x) + C_f$$

CIO È $y = 0,04x^2 + 16x + 10'000$ CON $x > 0$

b) LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x): y = \frac{C(x)}{x}$$

CIO È $y = \frac{0,04x^2 + 16x + 10000}{x}$

$$y = 0,04x + 16 + \frac{10000}{x} \quad \text{CON } x > 0$$

c) CALCOLIAMO IL PUNTO DI MINIMO PER IL COSTO MEDIO DETERMINANDO LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI COSTO MEDIO

$$y' = 0,04 - \frac{10'000}{x^2}$$

LA QUALE SI ANNULLA PER

$$0,04 - \frac{10'000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10'000}{0,04} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{250'000}$$

CIO È

~~$x_1 = -500$~~ NON ACCETTABILE PERCHÈ DEVE ESSERE $x > 0$

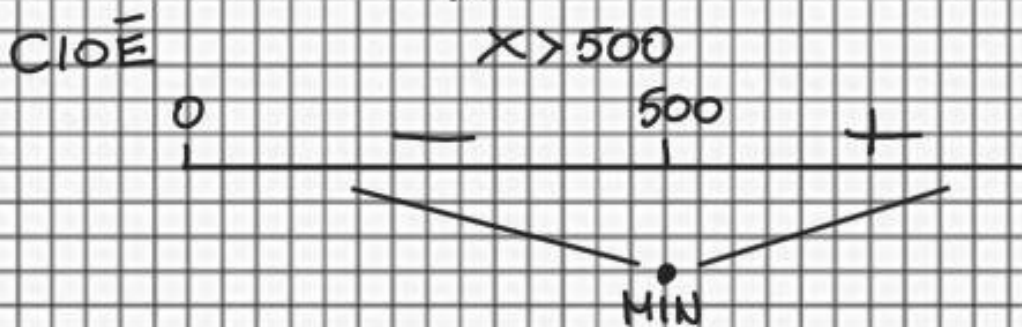
QUINDI

$$x_2 = +500$$

Costi di produzione

VERIFICHIAMO CHE PER $X=500$ LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO HA UN MINIMO STUDIANDO IL SEGNO DELLA SUA DERIVATA PRIMA

$$0,04 - \frac{10.000}{X^2} > 0 \quad \text{CON } X > 0$$



QUINDI PER $X=500$ SI HA UN COSTO MINIMO CHE CORRISPONDE A

$$C_v(500): y = 0,04 \cdot 500 + 16 + \frac{10000}{500}$$
$$y = 20 + 16 + 20$$

$$y = 56 \text{€}$$

COSTO MARGINALE

NELL'ANALISI DEI COSTI DI PRODUZIONE SI DEFINISCE COSTO MARGINALE UNA ULTERIORE FUNZIONE COME IL RAPPORTO TRA LA VARIAZIONE DEL COSTO TOTALE E VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ X PRODOTTA

SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DEFINITA NEL DISCRETO O NON È DERIVABILE IL COSTO MARGINALE È IL RAPPORTO INCREMENTALE TRA INCREMENTO DEL COSTO E INCREMENTO DELLA QUANTITÀ PRODOTTA, CIOÈ:

Costi di produzione

$$C_m(x): y = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$$

MENTRE SE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È DEFINITA NEL CONTINUO O È DERIVABILE IL COSTO MARGINALE È LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI COSTO TOTALE RISPETTO ALLA QUANTITÀ PRODOTTA X, CIOÈ:

$$C_m(x): y' = \frac{dC(x)}{dx}$$

DI CONSEGUENZA È INTUITIVO VERIFICARE CHE SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DI PRIMO GRADO IL COSTO MARGINALE SARÀ UNA COSTANTE, MENTRE SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DI SECONDO GRADO IL COSTO MARGINALE È A SUA VOLTA UNA FUNZIONE LINEARE (DI PRIMO GRADO) -

OSSERVAZIONE:

IL COSTO MARGINALE È IL COSTO SOSTENUTO PER OTTENERE UNA UNITÀ ADDIZIONALE DI PRODOTTO.

PROPRIETÀ

LE CURVE DEL COSTO MEDIO E DEL COSTO MARGINALE HANNO LO STESSO VALORE NEI PUNTI IN CUI LA DERIVATA DEL COSTO MEDIO SI ANNULLA, INFATTI:

$$C_v(x): y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C_v'(x): y' = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2}$$

E PONENDOLA UGUALE A ZERO SI OTTIENE

Costi di produzione

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow x \cdot C'(x) - C(x) = 0$$

DALLA QUALE

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}$$

CIOÈ

COSTO MARGINALE = COSTO MEDIO

DA QUESTA RELAZIONE È EVIDENTE COME CAMBIA LA CRESCENZA O LA DECRESCENZA DEL COSTO MEDIO, INFATTI ESSENDO LA DERIVATA PRIMA DEL COSTO MEDIO O UNITARIO PARI A

$$C'_U(x); y' = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(C'(x) - \frac{C(x)}{x} \right)$$

ALLORA

I SE $C'(x) < \frac{C(x)}{x}$ CIOÈ SE IL COSTO MARGINALE È INFERIORE AL COSTO MEDIO, ALLORA $y' < 0$ E IL COSTO MEDIO È DECRESCENTE.

II SE $C'(x) = \frac{C(x)}{x}$ CIOÈ SE IL COSTO MARGINALE È UGUALE AL COSTO MEDIO, ALLORA $y' = 0$.

III SE $C'(x) > \frac{C(x)}{x}$ CIOÈ SE IL COSTO MARGINALE È MAGGIORE DEL COSTO MEDIO, ALLORA $y' > 0$ E IL COSTO MEDIO È CRESCENTE.

Costi di produzione

ESERCIZI

1 DATA LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE

$$y = 0,25x^2 + 200x + 10.000$$

LA FUNZIONE DEL COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x) = \frac{0,25x^2 + 200x + 10.000}{x} = 0,25x + 200 + \frac{10.000}{x}$$

MENTRE LA FUNZIONE DEL COSTO MARGINALE È

$$C_m(x) = 0,50x + 200$$

RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE FUNZIONI DEL COSTO MEDIO O UNITARIO E DEL COSTO MARGINALE.

IL COSTO MEDIO È UN'IPERBOLE CON ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$ ED UN ASINTOTO OBLIQUO IN $y=0,25x+200$.

LA SUA DERIVATA PRIMA È

$$C_u'(x) = 0,25 - \frac{10.000}{x^2}$$

E SI ANNULLA PER

$$0,25 - \frac{10.000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10.000}{0,25} \Rightarrow x = \pm \sqrt{40.000}$$

CIO È

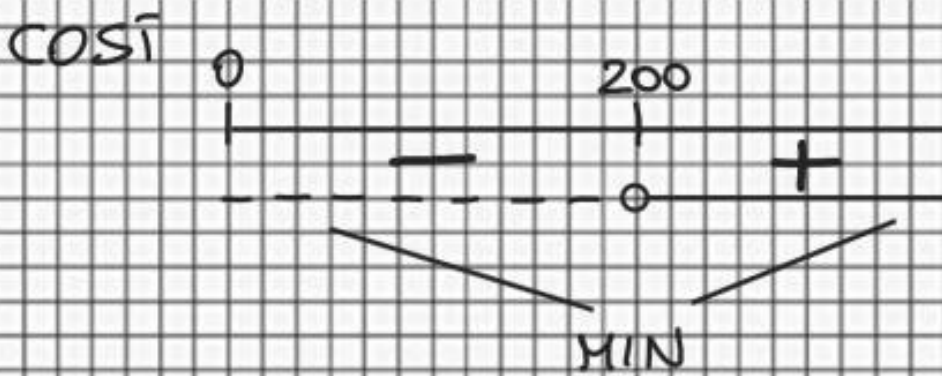
$$x_1 = -200 \quad \text{E} \quad x_2 = +200$$

CONSIDERANDO SOLO VALORI DI x POSITIVI

VERIFICHIANO DOVE È POSITIVA (IL SUO SEGNO):

$$C_u'(x) > 0 \Rightarrow 0,25 - \frac{10.000}{x^2} > 0 \Rightarrow x < -200 \cup x > +200$$

Costi di produzione

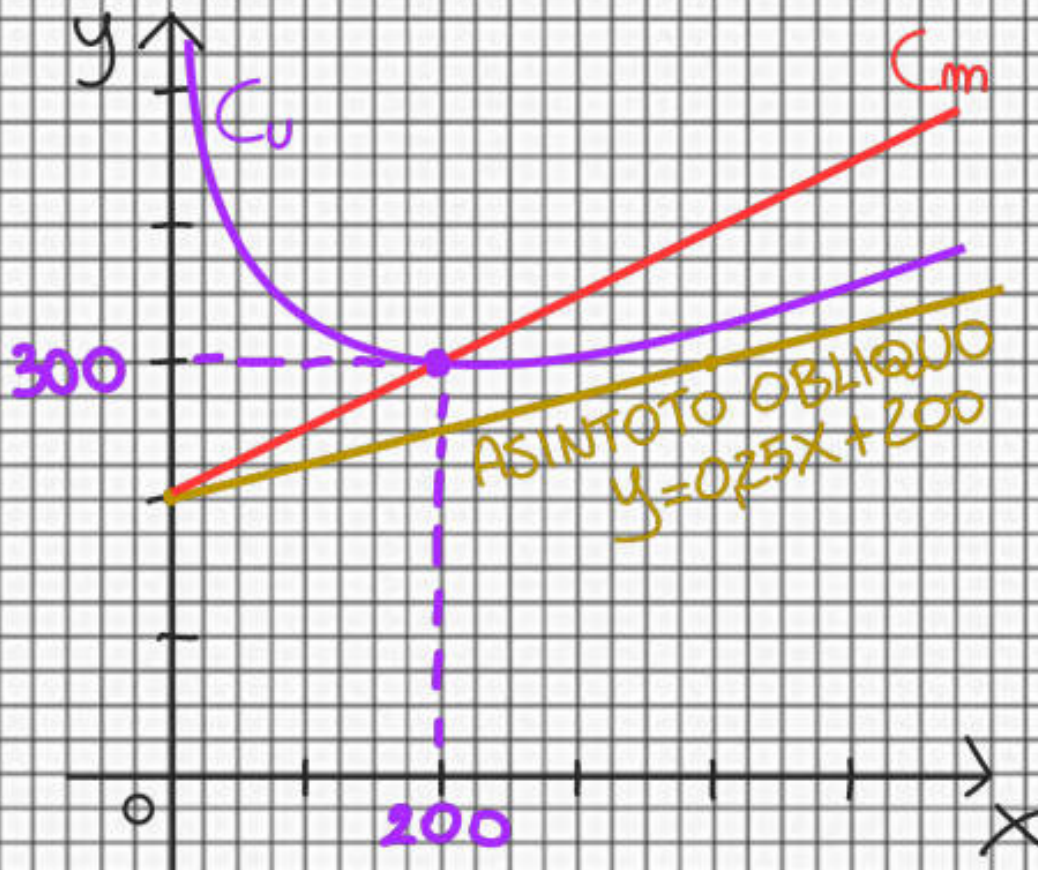


QUINDI HA UN PUNTO DI MINIMO IN

$$C_v(200) = 0,25 \cdot 200 + 200 + \frac{10 \cdot 000}{200} = 300$$

$$P(200; 300)$$

MENTRE IL COSTO MARGINALE È UNA RETTA DI COEFFICIENTE ANGOLARE 0,50 E TERMINE NOTO 200 CHE PASSA PER IL MINIMO (200; 300).



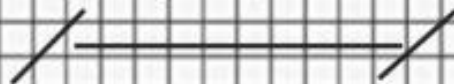
Costi di produzione

2 PER PRODURRE UN CERTO BENE UN'AZIENDA CON UNA CAPACITÀ PRODUTTIVA MASSIMA MENSILE DI 250 UNITÀ, SOSTIENE MENSILMENTE I SEGUENTI COSTI:

- € 6000 DI AFFITTO STRUTTURE
- € 50 PER OGNI UNITÀ PRODOTTA
- 10% DEL QUADRATO DEL NUMERO DI UNITÀ PRODOTTE PER STIPENDI DIPENDENTI

a) DETERMINARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE

b) DETERMINARE PER QUALE QUANTITÀ PRODOTTA I COSTI VARIABILI UGUAGLIANO IL COSTO FISSO



a) I COSTI CHE NON DIPENDONO DALLA QUANTITÀ x (COSTI FISSI) SONO

$$C_f = 6000$$

MENTRE QUELLI CHE DIPENDONO DALLA QUANTITÀ x (COSTI VARIABILI) SONO

$$C_v(x) = 0,1x^2 + 50x$$

QUINDI LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

CIOÈ

$$y = 0,1x^2 + 50x + 6000$$

CHE È UNA FUNZIONE DI SECONDO GRADO, E CIOÈ

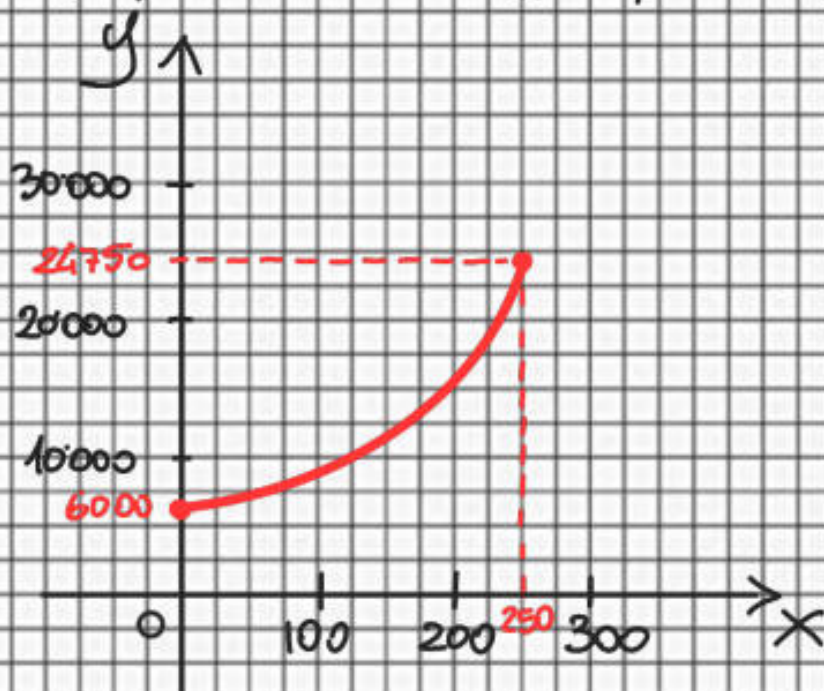
Costi di produzione

IL RAMO DI UNA PARABOLA PER $0 \leq x \leq 250$
PER LA CAPACITÀ MASSIMA PRODUTTIVA DELL'AZIENDA.
COSTI

SE $x=0 \Rightarrow y=6000$ (SOLO I COSTI FISSI)
SE $x=250 \Rightarrow y=24750$ (COSTI PER 250 UNITÀ)

QUINDI IL RAMO DELLA PARABOLA (CON CONCAVITÀ
VERSO L'ALTO) PASSA PER I PUNTI

$(0; 6000)$ E $(250; 24750)$



D) SE SI EQUAGLIANO I COSTI VARIABILI E I COSTI
FISSI

$$C_v(x) = C_f$$

SI OTTIENE L'EQUAZIONE

$$0,1x^2 + 50x = 6000$$

CIOÈ

$$0,1x^2 + 50x - 6000 = 0$$

CHE HA COME SOLUZIONI

Costi di produzione

$$\Delta = 50^2 - 4 \cdot (0,1) \cdot (-6000) = 2500 + 2400 = 4900$$

$$X_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{4900}}{2 \cdot 0,1} = \frac{-50 \pm 70}{0,2} = \begin{cases} \frac{-120}{0,2} = -600 \\ \frac{+20}{0,2} = +100 \end{cases}$$

3) PER PRODURRE UN CERTO BENE UN'AZIENDA CON UNA CAPACITÀ PRODUTTIVA MASSIMA SETTIMANALE DI 200 Kg, SOSTIENE SETTIMANALMENTE I SEGUENTI COSTI:

- € 2000 DI AFFITTO STRUTTURE
- € 80 PER OGNI KILOGRAMMO PRODOTTO

a) DETERMINARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE FUNZIONI DEL COSTO TOTALE, DEL COSTO MEDIO O UNITARIO E DEL COSTO MARGINALE.

b) CALCOLARE PER QUALE QUANTITÀ DI MERCE PRODOTTA IL COSTO UNITARIO È MINIMO.

a) I COSTI FISSI SONO

$$C_f = 2000$$

MENTRE I COSTI VARIABILI SONO

$$C_v(x) = 80x$$

LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

CIÒ È

$$y = 80x + 2000 \quad \text{CON } 0 \leq x \leq 200$$

LA FUNZIONE DEL COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Costi di produzione

CIOÈ $y = \frac{80x + 2000}{x} = 80 + \frac{2000}{x}$ CON $0 < x < 200$

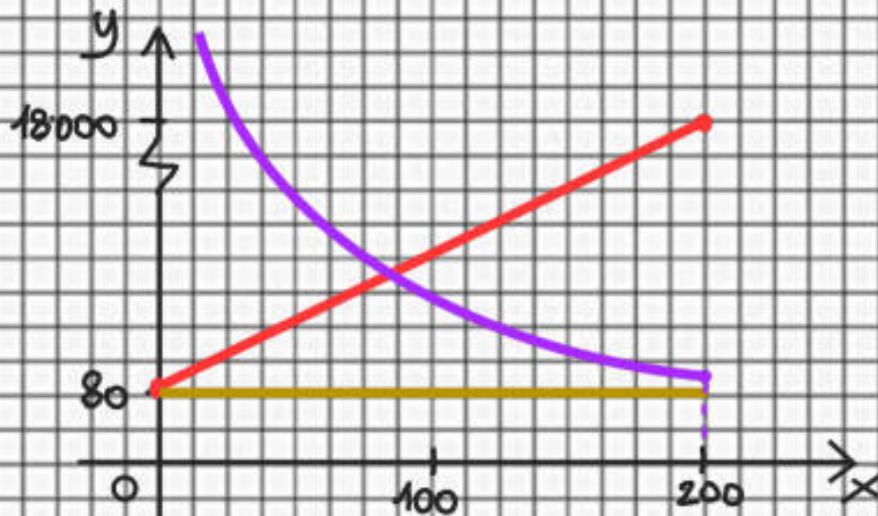
MENTRE LA FUNZIONE DEL COSTO MARGINALE È

$$C_m(x) = C'(x)$$

CIOÈ

$$y = 80$$

GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È UN SEGMENTO DI RETTA, MENTRE QUELLA DEL COSTO UNITARIO È UN RAMO DI IPERBOLE EQUILATERA CON ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$ E ASINTOTO ORIZZONTALE IN $y=80$, E QUELLA DEL COSTO MARGINALE È ANCH'ESSA UN SEGMENTO DI RETTA.



b) VISTO CHE IL COSTO UNITARIO È UNA IPERBOLE, CIOÈ UNA FUNZIONE DECRESCENTE, RAGGIUNGE IL SUO MINIMO PROPRIO NEL VALORE ESTREMO $x=200$, ALLORA IL COSTO UNITARIO MINIMO PER TALE QUANTITÀ È:

$$C_u(200) = 80 + \frac{2000}{200} = 80 + 10 = 90$$

CIOÈ

$$€ 90$$