Costi di produzione

QUANDO UN AZIENDA PRODUCE UN CERTO BENE, SOSTIENE DIVERSI TIPI DI SPESE CHE GENERALMENTE SI DIVIDONO IN COSTI FISSI CHE NON DIPENDONO DALLA QUANTITÀ PRODOTTA (COME AD ESEMPIO AFFITTI O CONSUMI DI ENERGIA ELETTRICA), COSTI VARIABILI PROPORZIONALI ALLA QUANTITÀ PRODOTTA (COME AD ESEMPIO L'ACQUISTO DELLE MATERIE PRIME) E COSTI VARIABILI NON PROPORZIONALI (COME AD ESEMPIO I SALARI DELLE DIPENDENZE).

DI CONSEGUENZA SE CONSIDERIAMO IL COSTO TOTALE COME LA SOMMA DEI COSTI FISSI E DI QUELLI VARIABILI, QUESTO PUÒ ESSERE VISTO COME FUNZIONE DELLA QUANTITÀ DI BENE PRODOTTA, COSÌ SE

C_f COSTI FISSI

$C_v(x)$ COSTI VARIABILI PER LA QUANTITÀ x

ALLORA DEFINIAMO

$$C(x):\ y = C_v(x) + C_f \quad \text{CON } x \geq 0$$

LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE, CHE È UNA FUNZIONE CRESCENTE DELLA QUANTITÀ x PUÒ ESSERE ESPRESSA DA DIVERSI TIPI DI RELAZIONI:

1-FUNZIONE DI PRIMO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

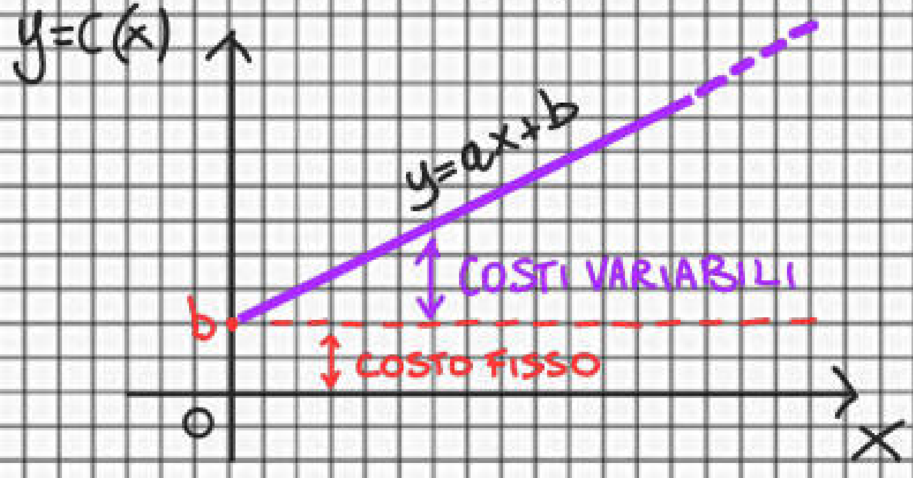
$$\boxed{y = ax + b}$$

CON

$a, b > 0$ QUANTITÀ POSITIVE

Costi di produzione

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax \quad \text{E} \quad C_f = b$$

2 - FUNZIONE DI SECONDO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

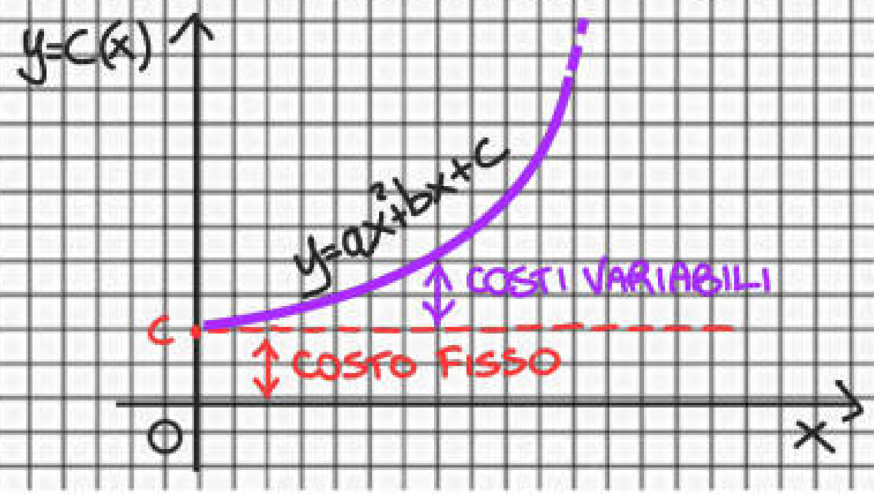
$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

CON

$a > 0$ QUANTITÀ POSITIVA

$b, c \geq 0$ QUANTITÀ NON NEGATIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax^2 + bx \quad \text{E} \quad C_f = c$$

3-FUNZIONE DI TERZO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

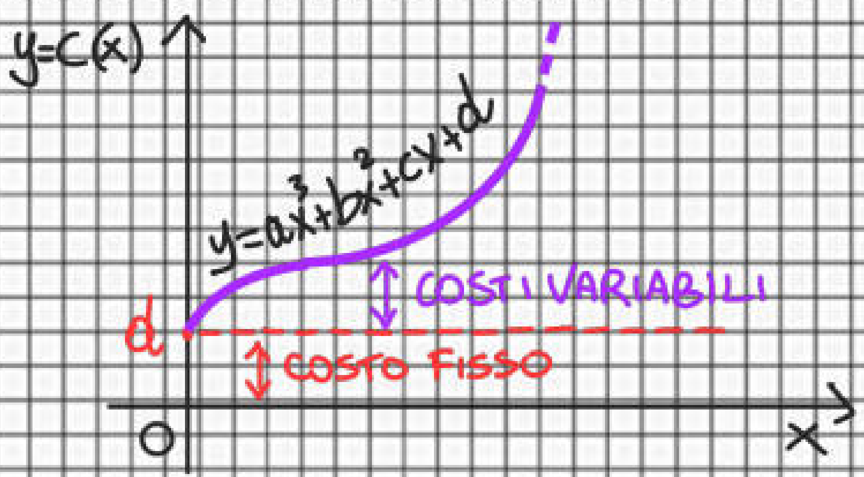
$$\boxed{y = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

CON

$a > 0$ QUANTITÁ POSITIVA

$b, c, d \geq 0$ QUANTITÁ NON NEGATIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA É



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \text{E} \quad C_f = d$$

4-FUNZIONE ESPONENZIALE

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

$$\boxed{y = a e^{bx}}$$

CON

$a, b > 0$ QUANTITÁ POSITIVE

ED e NUMERO DI NEPERO (CIRCA PARI A 2,71)

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA É

CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = e^{bx} \quad \text{E} \quad C_f = a$$

QUALUNQUE SIA LA RELAZIONE CHE ESPRIME IL COSTO TOTALE, QUANDO LA QUANTITÁ É NULLA CIOÉ

$$x = 0$$

IL COSTO TOTALE RAPPRESENTA SEMPRE E SOLO L'IMPORTO DEI COSTI FISSI, CIOÉ

$$y = C(0) = C_f$$

ESEMPIO

LA RELAZIONE CHE RAPPRESENTA I COSTI FISSI DI UN AZIENDA NEL PRODURRE UN CERTO BENE É RAPPRESENTATA DALLA SEGUENTE FUNZIONE

$$y = x^3 - 60x^2 + 1500x + 10000$$

DOVE NATURALMENTE X É LA QUANTITÀ DI BENE PRODOTTA.
RAPPRESENTIAMO GRAFICAMENTE LA FUNZIONE.
PER IL SUO STUDIO SI CONSIDERA SOLO IL PRIMO QUADRANTE DEL PIANO CARTESIANO IN CUI $x > 0$ ED $y > 0$.
POI SE $x = 0$ SI HA CHE $y = 10000$ CIOÉ L'IMPORTO DEI COSTI FISSI.
CALCOLIAMO LA DERIVATA PRIMA

$$y' = 3x^2 - 120x + 1500$$

E VERIFICHIAMO CHE SIA SEMPRE POSITIVA A CONFERMA CHE LA FUNZIONE É CRESCENTE:

$$3x^2 - 120x + 1500 = 0 \Rightarrow x^2 - 40x + 500 = 0$$

$$\Delta = (-40)^2 - 4(1)(500) = 1600 - 2000 = -400 < 0$$

ED ESSENDO IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 2° GRADO POSITIVO, ALLORA

$$y' > 0 \quad \text{PER OGNI } x$$

CALCOLIAMO LA DERIVATA SECONDA

$$y'' = 6x - 120$$

CHE SI ANNULLA IN

$$6x - 120 = 0$$

$$x = 20$$

DOVE

$$y = C(20) = 24000$$

ED È POSITIVA IN

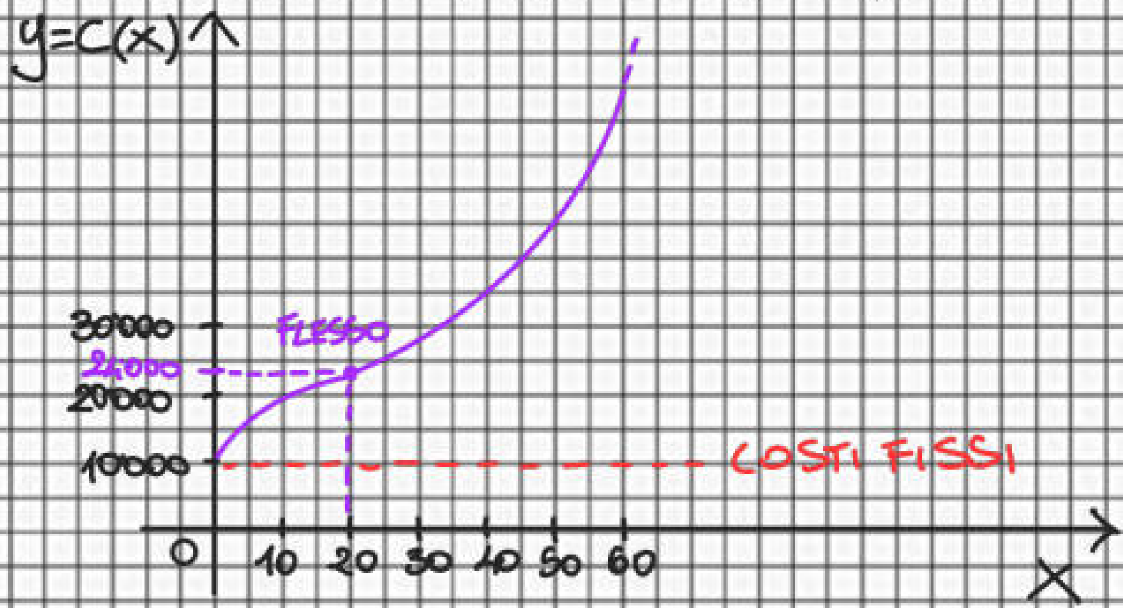
$$6x - 120 > 0$$

CIOÈ

$$x > 20$$

IL CHE SIGNIFICA CHE IN $x=20$ LA CURVA DELLA FUNZIONE HA UN PUNTO DI FLESSO.

PROVIAMO ALLORA A TRACCIARE IL GRAFICO:



E POSSIAMO NOTARE CHE NEL PUNTO (20, 24000) C'È UN CAMBIAMENTO DI CONCAVITÀ DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE (FLESSO).

COSTO MEDIO O UNITARIO

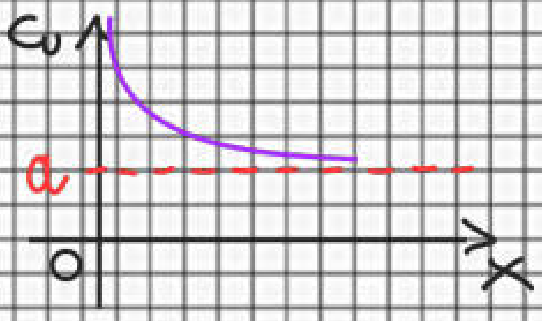
FACENDO UN ANALISI DEI COSTI DI PRODUZIONE SI DEFINISCE COSTO MEDIO O UNITARIO UN'ALTRA FUNZIONE, COME IL RAPPORTO TRA IL COSTO TOTALE E LA QUANTITÀ X PRODOTTA

$$\boxed{C_U:\ y=\frac{C(x)}{x}} \quad \text{CON } x>0$$

NEL CASO IN CUI LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È DI PRIMO GRADO

$$C_U:\ y=\frac{ax+b}{x}=a+\frac{b}{x} \quad \text{CON } \begin{array}{c} x>0 \\ a,b>0 \end{array}$$

CHE È UN RAMO DI UN IPERBOLE EQUILATERA DI ASINTOTI $x=0$ E $y=a$, SEMPRE DECRESCENTE FINO AD UN VALORE MINIMO (a):

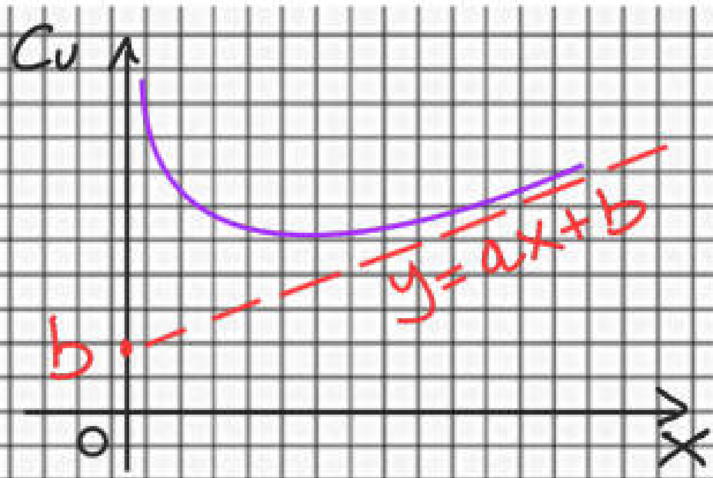


MENTRE NEL CASO IL COSTO TOTALE È UNA FUNZIONE DI 2° GRADO

$$C_U:\ y=\frac{ax^2+bx+c}{x}=ax+b+\frac{c}{x} \quad \text{CON } \begin{array}{c} x>0 \\ a,b,c>0 \end{array}$$

CHE È UN RAMO DI UN IPERBOLE NON EQUILATERA DI ASINTOTI $x=0$ E $y=ax+b$:

Costi di produzione



CHE È DECRESCENTE FINO AD UN VALORE MINIMO E POI È CRESCENTE.

OSSERVAZIONE:

IN GENERALE LE CURVE DEL COSTO UNITARIO HANNO UN PUNTO DI MINIMO COSTO DOVUTO ALLA PRESENZA DEI COSTI FISSI.
IL VALORE DI MINIMO COSTO UNITARIO NEI MERCATI È DETTO PUNTO DI FUGA PERCHÉ SE IL PREZZO DI VENDITA FOSSE INFERIORE A QUEL VALORE SI ANDREBBE IN PERDITA E L'AZIENDA PRODUTTRICE DOVREBBE LASCIARE IL MERCATO.

ESEMPIO

I COSTI SOSTENUTI MENSILMENTE DA UNA AZIENDA SONO

- $C_f = €\,10'000$
- COSTO PER OGNI UNITÀ PRODOTTA €16
- COSTI DI MANUTENZIONE IMPIANTI PARI AL 4% DEL QUADRATO DEL NUMERO DI UNITÀ PRODOTTE

a) DETERMINARE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE
b) DETERMINARE LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO O UNITARIO
c) DETERMINARE LA QUANTITÀ PRODOTTA PER LA QUALE IL COSTO UNITARIO È MINIMO.

a) LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È

$$C(x):\ y = C_v(x) + C_f$$

CIOÈ

$$\boxed{y = 0{,}04x^2 + 16x + 10'000 \quad \text{CON } x > 0}$$

b) LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x):\ y = \frac{C(x)}{x}$$

CIOÈ

$$y = \frac{0{,}04x^2 + 16x + 10000}{x}$$

$$\boxed{y = 0{,}04x + 16 + \frac{10000}{x} \quad \text{CON } x > 0}$$

c) CALCOLIAMO IL PUNTO DI MINIMO PER IL COSTO MEDIO DETERMINANDO LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI COSTO MEDIO

$$y' = 0{,}04 - \frac{10'000}{x^2}$$

LA QUALE SI ANNULLA PER

$$0{,}04 - \frac{10'000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10'000}{0{,}04} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{250'000}$$

CIOÈ

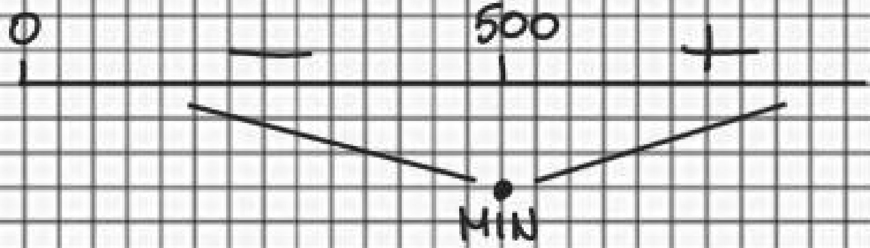
$\cancel{x_1 = -500}$ NON ACCETTABILE PERCHÉ DEVE ESSERE $x > 0$

QUINDI $\boxed{x_2 = +500}$

VERIFICHIAMO CHE PER $X=500$ LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO HA UN MINIMO STUDIANDO IL SEGNO DELLA SUA DERIVATA PRIMA

$$0{,}04-\frac{10000}{X^2}>0 \quad \text{CON } X>0$$

CIOÈ $$X>500$$



QUINDI PER $X=500$ SI HA UN COSTO MINIMO CHE CORRISPONDE A

$$C_u(500):\quad y=0{,}04\cdot 500+16+\frac{10000}{500}$$

$$y=20+16+20$$

$$\boxed{y=56€}$$

COSTO MARGINALE

NELL'ANALISI DEI COSTI DI PRODUZIONE SI DEFINISCE COSTO MARGINALE UNA ULTERIORE FUNZIONE COME IL RAPPORTO TRA LA VARIAZIONE DEL COSTO TOTALE E VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ X PRODOTTA.

SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DEFINITA NEL DISCRETO O NON È DERIVABILE IL COSTO MARGINALE È IL RAPPORTO INCREMENTALE TRA INCREMENTO DEL COSTO E INCREMENTO DELLA QUANTITÀ PRODOTTA, CIOÈ:

$$C_m(x): \ y = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$$

MENTRE SE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È DEFINITA NEL CONTINUO O È DERIVABILE IL COSTO MARGINALE È LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI COSTO TOTALE RISPETTO ALLA QUANTITÀ PRODOTTA X, CIOÈ:

$$C_m(x): \ y' = \frac{d\,C(x)}{dx}$$

DI CONSEGUENZA È INTUITIVO VERIFICARE CHE SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DI PRIMO GRADO IL COSTO MARGINALE SARÀ UNA COSTANTE, MENTRE SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DI SECONDO GRADO IL COSTO MARGINALE È A SUA VOLTA UNA FUNZIONE LINEARE (DI PRIMO GRADO).

OSSERVAZIONE:

IL COSTO MARGINALE È IL COSTO SOSTENUTO PER OTTENERE UNA UNITÀ ADDIZIONALE DI PRODOTTO.

PROPRIETÀ

LE CURVE DEL COSTO MEDIO E DEL COSTO MARGINALE HANNO LO STESSO VALORE NEI PUNTI IN CUI LA DERIVATA DEL COSTO MEDIO SI ANNULLA, INFATTI:

$$C_u(x): \ y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C_u'(x): \ y' = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2}$$

E PONENDOLA UGUALE A ZERO SI OTTIENE

$$y'=0 \Rightarrow \frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}=0 \Rightarrow x \cdot C'(x)-C(x)=0$$

DALLA QUALE

$$C'(x)=\frac{C(x)}{x}$$

CIOÈ

COSTO MARGINALE = COSTO MEDIO

DA QUESTA RELAZIONE È EVIDENTE COME CAMBIA LA CRESCENZA O LA DECRESCENZA DEL COSTO MEDIO, INFATTI ESSENDO LA DERIVATA PRIMA DEL COSTO MEDIO O UNITARIO PARI A

$$C'_U(x): y'=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(C'(x)-\frac{C(x)}{x}\right)$$

ALLORA

$\boxed{\text{I}}$ SE $C'(x)<\frac{C(x)}{x}$ CIOÈ SE IL COSTO MARGINALE È INFERIORE AL COSTO MEDIO, ALLORA $y'<0$ E IL **COSTO MEDIO** È **DECRESCENTE** _

$\boxed{\text{II}}$ SE $C'(x)=\frac{C(x)}{x}$ CIOÈ SE IL COSTO MARGINALE È UGUALE AL COSTO MEDIO, ALLORA $y'=0$ _

$\boxed{\text{III}}$ SE $C'(x) \quad \frac{C(x)}{x}$ CIOÈ SE IL COSTO MARGINALE È MAGGIORE DEL COSTO MEDIO, ALLORA $y'>0$ E IL **COSTO MEDIO** È **CRESCENTE** _

ESERCIZI

1 DATA LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE

$$y = 0,25x^2 + 200x + 10000$$

LA FUNZIONE DEL COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x) = \frac{0,25x^2 + 200x + 10000}{x} = 0,25x + 200 + \frac{10000}{x}$$

MENTRE LA FUNZIONE DEL COSTO MARGINALE È

$$C_m(x) = 0,50x + 200$$

RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE FUNZIONI DEL COSTO MEDIO O UNITARIO E DEL COSTO MARGINALE.

IL COSTO MEDIO È UN'IPERBOLE CON ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$ ED UN ASINTOTO OBLIQUO IN $y=0,25x+200$.

LA SUA DERIVATA PRIMA È

$$C'_u(x) = 0,25 - \frac{10000}{x^2}$$

E SI ANNULLA PER

$$0,25 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10000}{0,25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{40000}$$

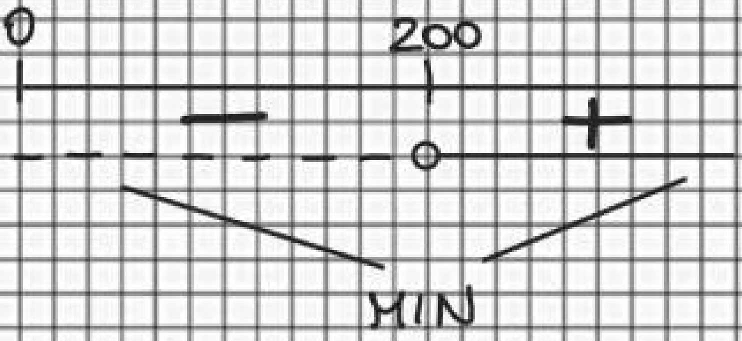
CIOÈ

$$\cancel{x_1 = -200} \quad \text{E} \quad x_2 = +200$$

CONSIDERANDO SOLO VALORI DI x POSITIVI VERIFICHIAMO DOVE È POSITIVA (IL SUO SEGNO):

$$C'_u(x) > 0 \Rightarrow 0,25 - \frac{10000}{x^2} > 0 \Rightarrow \cancel{x < -200} \cup x > +200$$

COSTI

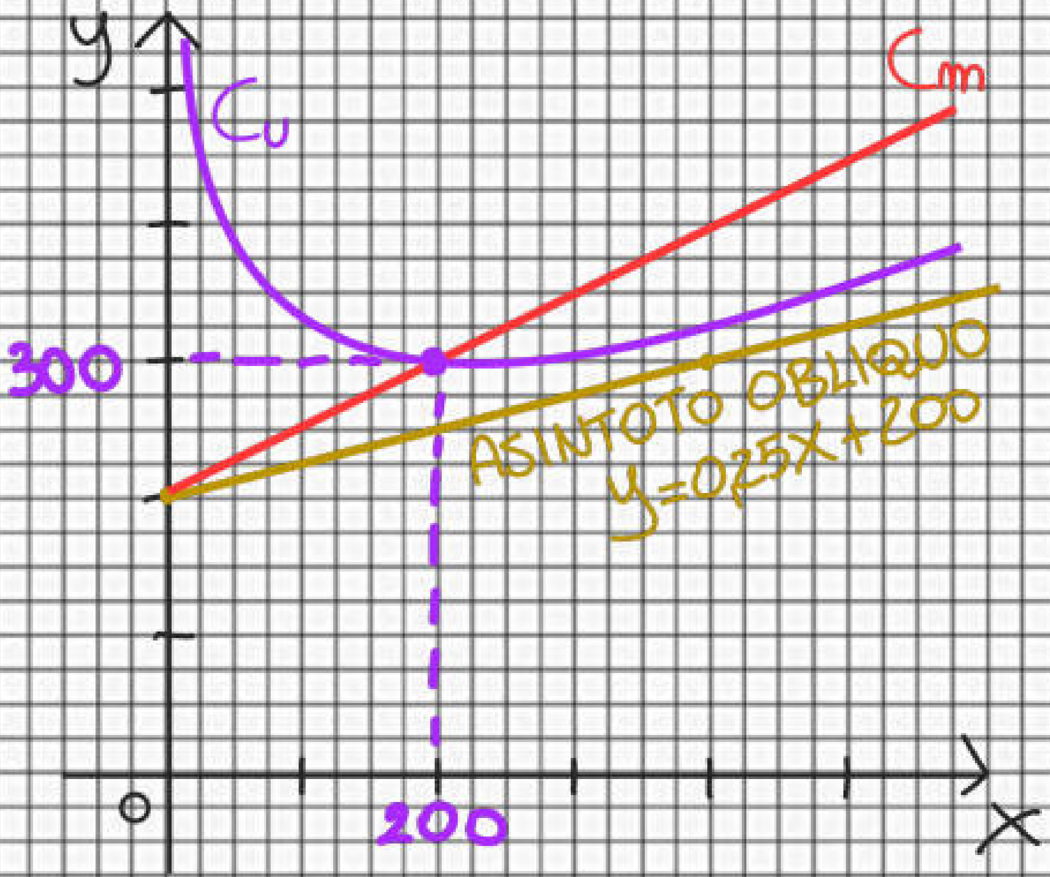


QUINDI HA UN PUNTO DI MINIMO IN

$$C_u(200)=0{,}25\cdot 200+200+\frac{10\,000}{200}=300$$

$$P(200;300)$$

MENTRE IL COSTO MARGINALE È UNA RETTA DI COEFFICIENTE ANGOLARE 0,50 E TERMINE NOTO 200 CHE PASSA PER IL MINIMO (200;300).



2 PER PRODURRE UN CERTO BENE UN AZIENDA CON UNA CAPACITÀ PRODUTTIVA MASSIMA MENSILE DI 250 UNITÀ, SOSTIENE MENSILMENTE I SEGUENTI COSTI:

- € 6000 DI AFFITTO STRUTTURE
- € 50 PER OGNI UNITÀ PRODOTTA
- 10% DEL QUADRATO DEL NUMERO DI UNITÀ PRODOTTE PER STIPENDI DIPENDENTI

a) DETERMINARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE.

b) DETERMINARE PER QUALE QUANTITÀ PRODOTTA I COSTI VARIABILI UGUAGLIANO IL COSTO FISSO.

---

a) I COSTI CHE NON DIPENDONO DALLA QUANTITÀ X (COSTI FISSI) SONO

$$C_f = 6000$$

MENTRE QUELLI CHE DIPENDONO DALLA QUANTITÀ X (COSTI VARIABILI) SONO

$$C_v(x) = 0{,}1x^2 + 50x$$

QUINDI LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

CIOÈ

$$\boxed{y = 0{,}1x^2 + 50x + 6000}$$

CHE È UNA FUNZIONE DI SECONDO GRADO, E CIOÈ

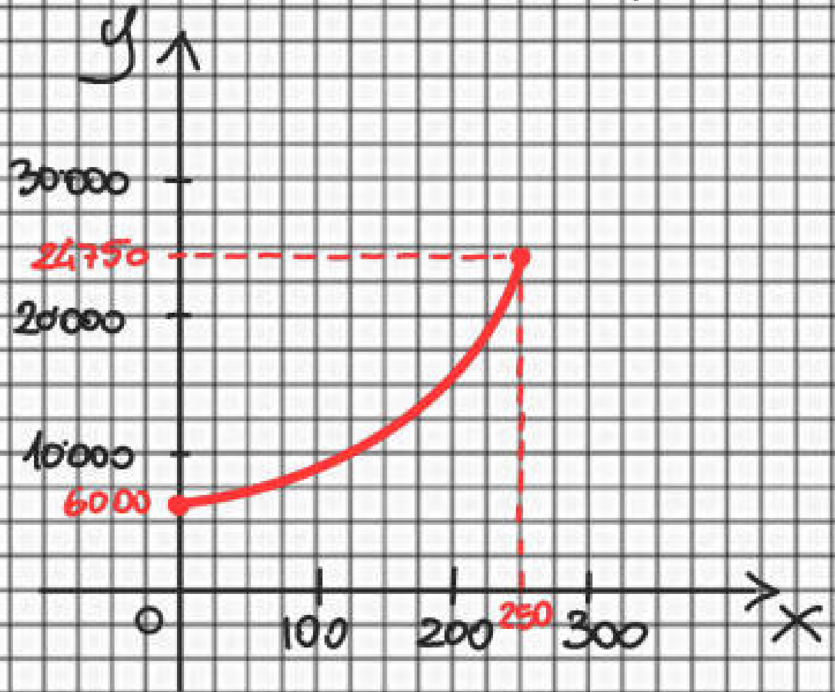
IL RAMO DI UNA PARABOLA PER $0 \leq x \leq 250$
PER LA CAPACITÀ MASSIMA PRODUTTIVA DELL'AZIENDA-
COSTI

SE $x = 0 \Rightarrow y = 6000$ (SOLO I COSTI FISSI)

SE $x = 250 \Rightarrow y = 24750$ (COSTI PER 250 UNITÀ)

QUINDI IL RAMO DELLA PARABOLA (CON CONCAVITÀ VERSO L'ALTO) PASSA PER I PUNTI

$$(0; 6000) \text{ E } (250; 24750)$$



b) SE SI EGUAGLIANO I COSTI VARIABILI E I COSTI FISSI

$$C_v(x) = C_f$$

SI OTTIENE L'EQUAZIONE

$$0{,}1x^2 + 50x = 6000$$

CIOÈ

$$0{,}1x^2 + 50x - 6000 = 0$$

CHE HA COME SOLUZIONI

$$\Delta = 50^2 - 4\cdot(0{,}1)\cdot(-6000) = 2500 + 2400 = 4900$$

$$x_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{4900}}{2\cdot 0{,}1} = \frac{-50 \pm 70}{0{,}2} = \begin{cases} \frac{-120}{0{,}2} = \cancel{-600} \\ \frac{+20}{0{,}2} = \boxed{+100} \end{cases}$$

3 PER PRODURRE UN CERTO BENE UN AZIENDA CON UNA CAPACITÀ PRODUTTIVA MASSIMA SETTIMANALE DI 200 Kg, SOSTIENE SETTIMANALMENTE I SEGUENTI COSTI:

- € 2000 DI AFFITTO STRUTTURE
- € 80 PER OGNI KILOGRAMMO PRODOTTO

a) DETERMINARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE FUNZIONI DEL COSTO TOTALE, DEL COSTO MEDIO O UNITARIO E DEL COSTO MARGINALE.

b) CALCOLARE PER QUALE QUANTITÀ DI MERCE PRODOTTA IL COSTO UNITARIO È MINIMO.

---

a) I COSTI FISSI SONO

$$C_f = 2000$$

MENTRE I COSTI VARIABILI SONO

$$C_v(x) = 80x$$

LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

CIOÈ

$$\boxed{y = 80x + 2000} \quad \text{CON } 0 \le x \le 200$$

LA FUNZIONE DEL COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x) = \frac{C(x)}{x}$$

CIOÈ

$$y = \frac{80x+2000}{x} = \boxed{80+\frac{2000}{x}} \quad \text{CON } 0 \leq x \leq 200$$

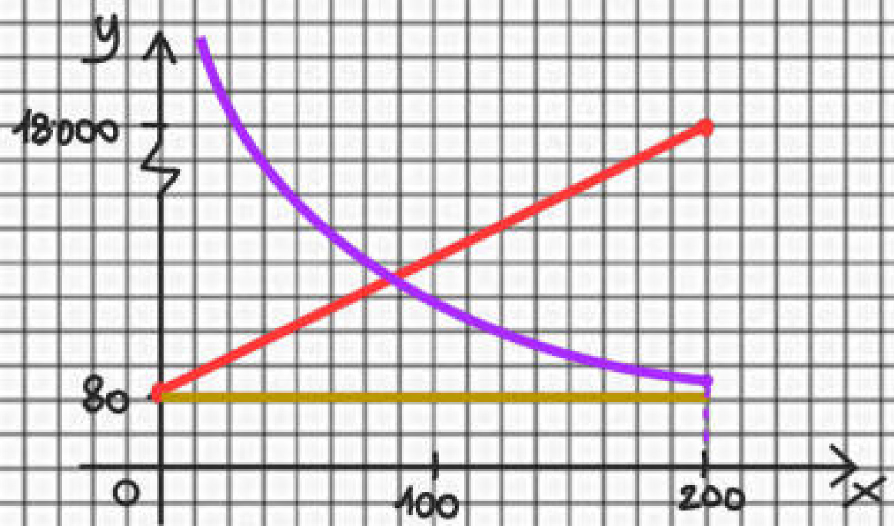
MENTRE LA FUNZIONE DEL COSTO MARGINALE È

$$C_m(x) = C'(x)$$

CIOÈ

$$\boxed{y=80}$$

GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È UN SEGMENTO DI RETTA, MENTRE QUELLA DEL COSTO UNITARIO È UN RAMO DI IPERBOLE EQUILATERA CON ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$ E ASINTOTO ORIZZONTALE IN $y=80$, E QUELLA DEL COSTO MARGINALE È ANCH'ESSO UN SEGMENTO DI RETTA.



b) VISTO CHE IL COSTO UNITARIO È UNA IPERBOLE, CIOÈ UNA FUNZIONE DECRESCENTE, RAGGIUNGE IL SUO MINIMO PROPRIO NEL VALORE ESTREMO $x=200$, ALLORA IL COSTO UNITARIO MINIMO PER TALE QUANTITÀ È:

$$C_u(200) = 80 + \frac{2000}{200} = 80+10 = 90$$

CIOÈ

$$\boxed{€\,90}$$