SI DEFINISCE EQUAZIONE BINOMIA QUELLA EQUAZIONE FORMATA DA UN POLINOMIO DI SOLI 2 TERMINI, UN TERMINE DI GRADO m ED UN TERMINE NOTO, DEL TIPO:

$$\boxed{ax^m + b = 0}$$

CON $a \neq 0$ $b \neq 0$ ED $m \geq 1$

SI PUÒ NOTARE CHE SE

- $m=1$ SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO
- $m=2$ SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO PURA
- $m \geq 3$ SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL 2°

NEI PRIMI DUE CASI SAPPIAMO GIÀ COME RISOLVERLA MENTRE SE $m \geq 3$ ALLORA BISOGNA FARE ATTENZIONE ALLA PARITÀ O DISPARITÀ PROPRIO DI m, CONSIDERANDO SEPARATAMENTE I DUE DIVERSI CASI.

CASO M DISPARI

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE AMMETTE SEMPRE UNA ED UNA SOLA SOLUZIONE REALE CHE È

$$x = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}$$

CIOÈ

$$\boxed{x = -\sqrt[m]{\frac{b}{a}}}$$

PERCHÉ DAI RADICALI SAPPIAMO CHE È SEMPRE POSSIBILE ESTRARRE LA RADICE CON INDICE DISPARI DI QUALSIASI NUMERO REALE, INDIPENDENTEMENTE DAL SUO SEGNO.

CASO n PARI

IN QUESTO CASO SAPENDO CHE NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA RADICE CON INDICE PARI DI UN NUMERO NEGATIVO, BISOGNA DISTINGUERE LE SITUAZIONI IN CUI IL RADICANDO È NEGATIVO RISPETTO A QUELLE IN CUI È POSITIVO. VISTO CHE LA SOLUZIONE LA SI PUÒ ESPRIMERE SEMPRE COME:

$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

ALLORA POSSIAMO DIRE CHE SE I COEFFICIENTI a E b SONO DISCORDI (CIOÈ HANNO SEGNO DIVERSO) LA QUANTITÀ $-\frac{b}{a}$ SARÀ SICURAMENTE POSITIVA, L'EQUAZIONE AMMETTE DUE SOLUZIONI PERCHÉ ESISTONO SEMPRE DUE NUMERI OPPOSTI CHE ELEVATI AD UN ESPONENTE n PARI, SONO UGUALI AL RADICANDO $-\frac{b}{a}$ (DA QUESTO IL $\pm$) E TALI SOLUZIONI SARANNO ANCHE DISTINTE E OPPOSTE PERCHÉ PER IPOTESI $b \neq 0$, CHE SARANNO

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

MENTRE SE I COEFFICIENTI a E b SONO CONCORDI (CIOÈ HANNO STESSO SEGNO) LA QUANTITÀ $-\frac{b}{a}$ SARÀ SICURAMENTE NEGATIVA E L'EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONI PERCHÉ COME SAPPIAMO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA RADICE CON INDICE PARI DI UN NUMERO NEGATIVO A MENO CHE NON SI FACCIA RICORSO ALL'UTILIZZO DEI NUMERI COMPLESSI.

ESEMPI

1) $2x^6-54=0$ $\quad n=6$ PARI

$2x^6=54 \Rightarrow x^6=\frac{54}{2} \Rightarrow x^6=27$

$x=\pm\sqrt[6]{27}=\pm\sqrt[6]{3^3}=\boxed{\pm\sqrt{3}}$

2) $x^3+8=0$ $\quad n=3$ DISPARI

$x^3=-8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{2^3}=\boxed{-2}$

3) $x^4-4=0$ $\quad n=4$ PARI

$x^4=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt[4]{2^2}=\boxed{\pm\sqrt{2}}$

4) $32x^5-1=0$ $\quad n=5$ DISPARI

$x=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}}=\boxed{\frac{1}{2}}$

5) $64x^6+1=0$ $\quad n=6$ PARI

$x=\pm\sqrt[6]{-\frac{1}{6}}$ IMPOSSIBILE (NESSUNA SOLUZIONE REALE)

6) $4x^5-2=0$ $\quad n=5$ DISPARI

$x=\sqrt[5]{\frac{2}{4}}=\boxed{\sqrt[5]{\frac{1}{2}}}$

7) $36x^4-81=0$ $\quad n=4$ PARI

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{81}{36}}=\pm\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^2\cdot 3^2}}=\pm\sqrt[4]{\frac{3^2}{2^2}}=\boxed{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$

EQUAZIONI BIQUADRATICHE

SI DEFINISCE EQUAZIONE BIQUADRATICA QUELLA EQUAZIONE FORMATA DA UN TRINOMIO IN UNA INCOGNITA CON UN TERMINE DI 4° GRADO, UNO DI 2° GRADO E UN TERMINE NOTO, CIOÈ:

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

PER RISOLVERE QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SI PROCEDE CON UNA TRASFORMAZIONE DELL'INCOGNITA OTTENENDO UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO.

PONENDO AD ESEMPIO:

$$\boxed{x^2 = z}$$

IN MODO CHE

$$\boxed{x^4 = (x^2)^2 = z^2}$$

L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0}$$

CHE È UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO NELLA VARIABILE z.

A QUESTO PUNTO SI RISOLVE L'EQUAZIONE DI 2° GRADO OTTENENDO 2 SOLUZIONI z_1 E z_2.

SI SOSTITUISCONO I VALORI DI TALI SOLUZIONI NELLA EGUAGLIANZA POSTA INIZIALMENTE E SI PROCEDE A RISOLVERE LE 2 EQUAZIONI

$$\boxed{x^2 = z_1} \quad \text{E} \quad \boxed{x^2 = z_2}$$

OTTENENDO COSÌ LE 4 SOLUZIONI DELLA EQUAZIONE BIQUADRATICA DI PARTENZA LE QUALI POSSONO ESSERE REALI O COMPLESSE.

ESEMPI

1) $4x^4-11x^2-3=0 \qquad z=x^2$

$4z^2-11z-3=0$

$$z_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{(11)^2-4(4)(-3)}}{2\cdot 4}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{11\pm 13}{8}=\begin{cases}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{8}_4}=-\frac{1}{4}\\[4pt] \frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{8}}=3\end{cases}$$

QUINDI:

a) $x^2=-\frac{1}{4}$ NESSUNA SOLUZIONE REALE (2 COMPLESSE)

b) $x^2=3 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$ 2 SOLUZIONI REALI

2) $4x^2-5x^2+1=0 \qquad z=x^2$

$4z^2-5z+1=0$

$$z_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(4)(1)}}{2\cdot 4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm 3}{8}=\begin{cases}\frac{\cancel{2}}{\cancel{8}_4}=\frac{1}{4}\\[4pt] \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}=1\end{cases}$$

$x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\boxed{\pm\frac{1}{2}}$

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\boxed{\pm 1}$

4 SOLUZIONI REALI

3) $x^4-10x^2+9=0 \qquad z=x^2$

$z^2-10z+9=0$

$$z_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}=1\\[4pt] \frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}=9\end{cases}$$

$x^2=1 \Rightarrow x=\boxed{\pm 1}$

$x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\boxed{\pm 3}$

EQUAZIONI TRINOMIE

SI DEFINISCE EQUAZIONE TRINOMIA QUELLA EQUAZIONE FORMATA DA UN TRINOMIO IN UNA INCOGNITA CON UN TERMINE DI GRADO $2m$, UNO DI GRADO m ED UN TERMINE NOTO, CIOÈ:

$$\boxed{ax^{2m}+bx^{m}+c=0}$$

SI PUÒ IMMEDIATAMENTE OSSERVARE COME LE EQUAZIONI BIQUADRATICHE SONO UN CASO PARTICOLARE DI EQUAZIONI TRINOMIE CON $m=2$.

ANCHE IN QUESTO CASO PER PROCEDERE ALLA LORO RISOLUZIONE BASTA UNA TRASFORMAZIONE DELL'INCOGNITA OTTENENDO UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO, PONENDO

$$\boxed{x^{m}=z}$$

IN MODO CHE

$$\boxed{x^{2m}=(x^{m})^{2}=z^{2}}$$

E L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$\boxed{az^{2}+bz+c=0}$$

RISOLVENDO QUINDI L'EQUAZIONE DI 2° GRADO SI OTTENGONO 2 SOLUZIONI z_1 E z_2 CHE A LORO VOLTA CI PORTANO A RISOLVERE 2 EQUAZIONI BINOMIE:

$$\boxed{x^{m}=z_1} \quad \text{E} \quad \boxed{x^{m}=z_2}$$

ESEMPI

1) $x^6-7x^3-8=0$ $\qquad z=x^3$

$z^2-7z-8=0$

$$z_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{(7)^2-4(1)(-8)}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{7\pm 9}{2}=\begin{cases}\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}}=-1\\ \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}}=8\end{cases}$$

così:

a) $x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=\boxed{-1}$

b) $x^3=8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}=\boxed{2}$

2) $x^6+13x^3+40=0$ $\qquad z=x^3$

$z^2+13z+40=0$

$$z_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{(13)^2-4(1)(40)}}{2}=\frac{-13\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-13\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}}=-8\\ \frac{-\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}=-5\end{cases}$$

$x^3=-8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}=\boxed{-2}$

$x^3=-5 \Rightarrow x=\boxed{-\sqrt[3]{5}}$

3) $x^8-4x^4+3=0$ $\qquad z=x^4$

$z^2-4z+3=0 \qquad z_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}=1\\ \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}=3\end{cases}$

$x^4=1 \Rightarrow x=\sqrt[4]{1}=\boxed{\pm 1}$

$x^4=3 \Rightarrow x=\boxed{\pm\sqrt[4]{3}}$

4) $-3x^{12}-3x^6+6=0$ $\qquad z=x^6$

$-3z^2-3z+6=0 \qquad z_1=1 \qquad z_2=-2$

$x^6=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt[6]{1}=\boxed{\pm 1} \quad \cup \quad x^6=-2 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt[6]{-2}}$ QUI NESSUNA SOLUZIONE REALE

DISEQUAZIONI BINOMIE

COME PER LE EQUAZIONI BINOMIE ANCHE IN QUESTO CASO PER PROCEDERE ALLA RISOLUZIONE BISOGNA DISTINGUERE I CASI IN CUI m È PARI O DISPARI.
CONSIDERATA LA GENERICA DISEQUAZIONE BINOMIA

$$\boxed{x^m + b \geq 0} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{x^m + b \leq 0}$$

SE m È DISPARI

SI PROCEDE CON UN UNICO METODO, CIOÈ SI ISOLA LA X AL PRIMO MEMBRO E SI ESTRAE LA RADICE CON INDICE m DI ENTRAMBI I MEMBRI, CIOÈ AD ESEMPIO:

$$\boxed{x^3+27>0} \Rightarrow x^3>-27 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3}>\sqrt[3]{-27} \Rightarrow x>-\cancel{\sqrt[3]{3^3}} \Rightarrow \boxed{x>-3}$$

OPPURE

$$\boxed{x^3-27<0} \Rightarrow x^3<27 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3}<\sqrt[3]{27} \Rightarrow x<\cancel{\sqrt[3]{3^3}} \Rightarrow \boxed{x<3}$$

SE m È PARI

SI PROCEDE CON LA RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE BINOMIA ASSOCIATA CONSIDERANDO LE SUE SOLUZIONI E ADOTTANDO LO STESSO METODO RISOLUTIVO DELLE DISEQUAZIONI DI 2° GRADO, COME AD ESEMPIO:

$$x^4-16>0 \Rightarrow x^4-16=0 \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{16}$$

$$x=\pm\cancel{\sqrt[4]{2^4}} \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \boxed{x<-2 \cup x>+2}$$

OPPURE

$$x^4-16\leq 0 \qquad x=\pm 2 \qquad -2\leq x\leq +2$$

OPPURE

$x^4+16\geq 0$ $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \text{ PERCHÉ SOMMA DI QUANTITÀ SEMPRE POSITIVE}}$

OPPURE

$x^4+16<0$ $\boxed{\text{NESSUNA SOLUZIONE} \quad \text{PERCHÉ IL PRIMO MEMBRO È SEMPRE POSITIVO}}$

ESEMPI

1] $x^4-1<0$

$x^4-1=0$

$x=\pm 1$ $\boxed{-1<x<+1}$

2] $x^6-64\geq 0$

$x^6-64=0$

$x^6=64$

$x=\pm\sqrt[6]{64}=\pm\sqrt[\cancel{6}]{2^{\cancel{6}}}=\pm 2$ $\boxed{x\leq -2 \cup x\geq +2}$

3] $x^3+1\leq 0$

$x^3\leq -1$

$\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}}\leq\sqrt[3]{-1}$ $\boxed{x\leq -1}$

4] $x^4-81<0$

$x^4-81=0$

$x^4=81$ $x=\pm\sqrt[4]{81}=\pm\sqrt[\cancel{4}]{3^{\cancel{4}}}=\pm 3$

$\boxed{-3<x<+3}$

5] $x^5+32<0$

$x^5<-32$

$\sqrt[\cancel{5}]{x^{\cancel{5}}}<\sqrt[\cancel{5}]{-2^{\cancel{5}}}$ $\boxed{x<-2}$

6) $x^6 + 1 \geq 0$ $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$

7) $x^{10} + 100 < 0$ $\qquad \boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$

DISEQUAZIONI BIQUADRATICHE E TRINOMIE

PER RISOLVERE UNA DISEQUAZIONE BIQUADRATICA O PIÙ IN GENERALE TRINOMIA:

1) SI SOSTITUISCE L'INCOGNITA ALLO STESSO MODO FATTO PER LE EQUAZIONI BIQUADRATICHE E TRINOMIE.
2) SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO NELLA NUOVA INCOGNITA.
3) NELLE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO SI RISOSTITUISCE L'INCOGNITA DELLA DISEQUAZIONE BIQUADRATICA O TRINOMIA.
4) SI RISOLVONO LE DISEQUAZIONI BINOMIE OTTENUTE.

ESEMPI

1) $x^4 - 2x^2 + 1 \leq 0 \qquad z = x^2$

$z^2 - 2z + 1 \leq 0$

$z^2 - 2z + 1 = 0 \qquad z_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \qquad z = 1$

$x^2 = 1 \qquad \boxed{x = \pm 1}$

2) $x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0 \qquad z = x^2$

$z^2 - 3z - 4 \geq 0$

$z^2 - 3z - 4 = 0 \qquad z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = -1 \\ \dfrac{\cancel{8}^4}{\cancel{2}} = +4 \end{cases}$

$z \leq -1 \quad \cup \quad z \geq +4$

COSÌ

$x^2 \leq -1 \quad \cup \quad x^2 \geq +4$

$x^2+1 \leq 0 \qquad x^2-4 \geq 0$

$\boxed{\text{MAI}} \qquad x^2=4$

$x=\pm 2$

$\boxed{x \leq -2 \cup x \geq +2}$

3 $x^6-15x^3+56<0 \qquad z=x^3$

$z^2-15z+56<0$

$z^2-15z+56=0 \qquad z_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225-224}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{\cancel{14}}{\cancel{2}}=7 \\ \frac{\cancel{16}}{\cancel{2}}=8 \end{array} \right.$

$7<z<8$

$7<x^3<8$

$\sqrt[3]{7}<x<\cancel{\sqrt[3]{2^3}} \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{7}<x<2}$

4 $x^8-21x^4+80 \geq 0 \qquad z=x^4$

$z^2-21z+80 \geq 0$

$z^2-21z+80=0 \qquad z_{1,2}=\left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 16 \end{array} \right.$

$z \leq 5 \quad \cup \quad z \geq 16$

$x^4 \leq 5 \qquad x^4 \geq 16$

$x^4-5 \leq 0 \qquad x^4-16 \geq 0$

$x=\pm\sqrt[4]{5} \qquad x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$

$-\sqrt[4]{5} \leq x \leq +\sqrt[4]{5} \qquad x \leq -2 \cup x \geq +2$

E QUINDI

$\boxed{x \leq -2 \cup -\sqrt[4]{5} \leq x \leq +\sqrt[4]{5} \cup x \geq +2}$