MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI

SPESSO IN MOLTE APPLICAZIONI SI PRESENTA IL PROBLEMA DI DETERMINARE EVENTUALI MASSIMI O MINIMI DI UNA FUNZIONE LE CUI VARIABILI DEVONO SODDISFARE DETERMINATE CONDIZIONI DETTE VINCOLI, PARLANDO COSÍ DI ESTREMI VINCOLATI.

PER ESEMPIO IN ECONOMIA IL CASO PUÓ ESSERE QUELLO DELLA DETERMINAZIONE DELLA QUANTITÁ DA ACQUISTARE DI UN BENE IN MODO CHE L'UTILITÁ DEL CONSUMATORE SIA MASSIMA CON UN BILANCIO PREFISSATO.

CONSIDERANDO IL CASO IN CUI I VINCOLI SONO ESPRESSI DA EQUAZIONI, PER LE FUNZIONI IN DUE VARIABILI IL PROBLEMA CONSISTE NELLA RICERCA DEI MASSIMI O MINIMI DI UNA FUNZIONE

$$z=f(x;y)$$

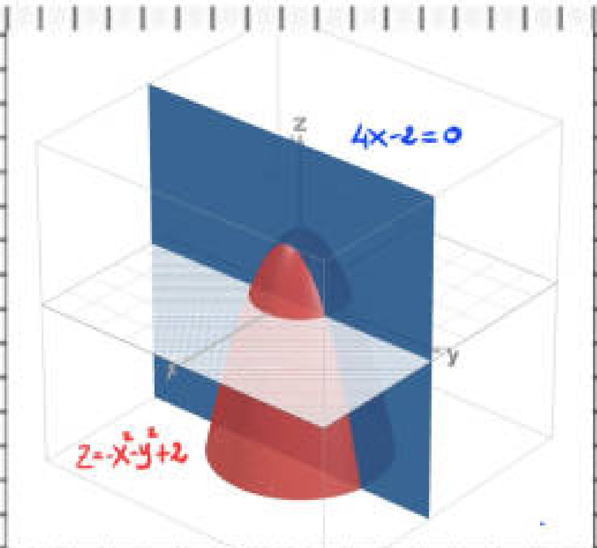
IN CUI LE VARIABILI x ED y NON SONO INDIPENDENTI MA LEGATE DA UNA RELAZIONE ESPRESSA DAL VINCOLO

$$g(x;y)=0$$

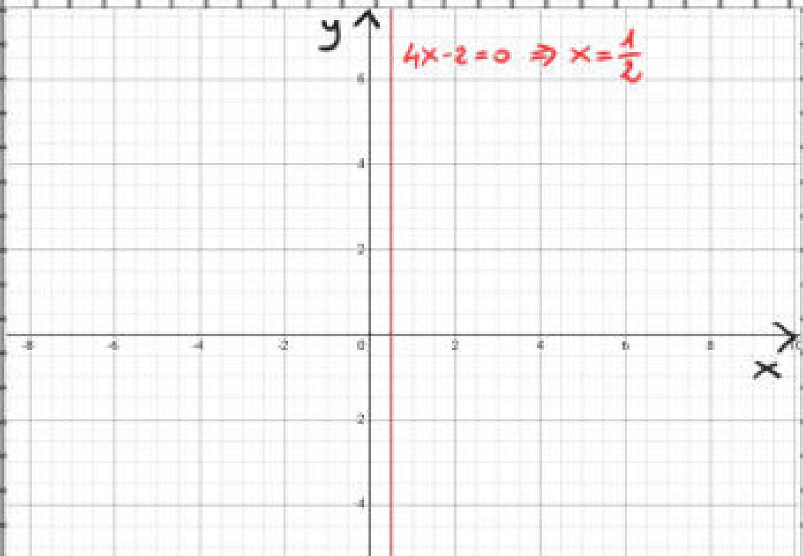
L'EQUAZIONE DEL VINCOLO SI RAPPRESENTA IN GENERALE CON UNA LINEA O UNA CURVA APPARTENENTE AL PIANO xy.

CONSIDERANDO AD ESEMPIO IL CASO IN CUI IL VINCOLO SIA RAPPRESENTATO DA UNA EQUAZIONE DI PRIMO GRADO, SI AVREBBE UNA SITUAZIONE DOVE

IL GRAFICO DELLA FUNZIONE
È TAGLIATO (ATTRAVERSATO)
DA UN PIANO_
QUESTO SIGNIFICA CHE GLI
EVENTUALI MASSIMI O
MINIMI DELLA FUNZIONE
VANNO RICERCATI NELLA
INTERSEZIONE DEL GRAFICO



DELLA FUNZIONE CON IL PIANO (NELL'ESEMPIO VERTICALE E PARALLELO AL PIANO ZY)_
CONSIDERANDO COSÌ IL SOLO PIANO DI BASE XY, IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE DEL VINCOLO SARÀ UNA RETTA



IL CHE SIGNIFICA CHE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI DELLA FUNZIONE NON VANNO RICERCATI IN TUTTO IL SUO DOMINIO MA SOLO NEI PUNTI DI INTERSEZIONE DEL DOMINIO E LA LINEA O CURVA CHE RAPPRESENTA IL VINCOLO, NELL'ESEMPIO TUTTI I PUNTI DELLA LINEA ROSSA, CHE È L'INTERSEZIONE TRA IL DOMINIO $\mathbb{R}^2$ E LA RETTA DEL VINCOLO_

RICERCA DI MAX O MIN VINCOLATI PER SOSTITUZIONE

QUANDO L'EQUAZIONE DEL VINCOLO

$$g(x;y)=0$$

È DI PRIMO GRADO RISPETTO AD UNA VARIABILE LA RICERCA DI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI VINCOLATI SI EFFETTUA PER SOSTITUZIONE.
SI RICAVA LA VARIABILE CON GRADO 1 DALL'EQUAZIONE DEL VINCOLO E SI SOSTITUISCE NELLA FUNZIONE, OTTENENDO COSÌ UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE DELLA QUALE SI DETERMINANO GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI.

RICERCA DI MAX O MIN VINCOLATI CON LE LINEE DI LIVELLO

QUANDO NON È POSSIBILE APPLICARE IL METODO PER SOSTITUZIONE, CIOÈ NELLA EQUAZIONE DEL VINCOLO ENTRAMBE LE VARIABILI HANNO GRADO SUPERIORE AL PRIMO, LA RICERCA DI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI VINCOLATI SI PUÒ EFFETTUARE MEDIANTE LA RAPPRESENTAZIONE NEL PIANO DI BASE XY DELLE LINE DI LIVELLO E DELLA LINEA O CURVA CHE RAPPRESENTA IL VINCOLO.
I PUNTI DI MASSIMO O MINIMO VINCOLATO SONO QUEI PUNTI IN CUI LE LINEE DI LIVELLO SONO TANGENTI ALLA LINEA O CURVA DEL VINCOLO.

ESEMPI

1 DETERMINARE MASSIMI E MINIMI DELLA FUNZIONE

$$z=x\cdot y$$

SOTTOPOSTA AL VINCOLO

$$x^2 - y - x = 0$$

VISTO CHE L'EQUAZIONE DEL VINCOLO È LINEARE (DI PRIMO GRADO) RISPETTO AD y, ALLORA POSSIAMO APPLICARE IL METODO PER SOSTITUZIONE.

RICAVIAMO y DAL VINCOLO:

$$x^2 - y - x = 0 \Rightarrow y = x^2 - x$$

E LA SOSTITUIAMO NELLA FUNZIONE

$$z = x \cdot y = x \cdot (x^2 - x) = x^3 - x^2$$

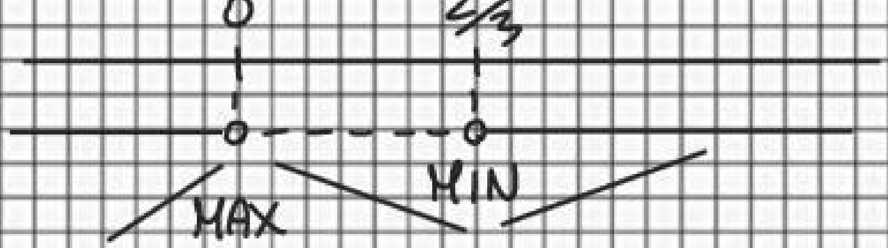
A QUESTO PUNTO È UNA FUNZIONE NELLA SOLA x, COSÌ DETERMINIAMO EVENTUALI MASSIMI O MINIMI CALCOLANDO LA SUA DERIVATA PRIMA, VERIFICANDO DOVE LA DERIVATA SI ANNULLA E STUDIANDO IL SEGNO SEMPRE DELLA DERIVATA.

$$z' = 3x^2 - 2x$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{-2}{3} = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

$$z' > 0 \Rightarrow x < 0 \cup x > \frac{2}{3}$$

COSÌ



CIOÈ PER $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 0 = 0$ (DAL VINCOLO)

MENTRE PER $x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{4-6}{9} = -\frac{2}{9}$

QUINDI

$P_1(0;0)$ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z = 0 \cdot 0 = 0$

$P_2\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{9}\right)$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{4}{27}$

OSSERVAZIONE

SI PUÒ FACILMENTE VERIFICARE CHE LA FUNZIONE

$$z = xy$$

NON HA NÉ MASSIMI E NÉ MINIMI LIBERI, PERCHÉ

$$z'_x = y \quad \text{E} \quad z'_y = x$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0;0)$$

MA

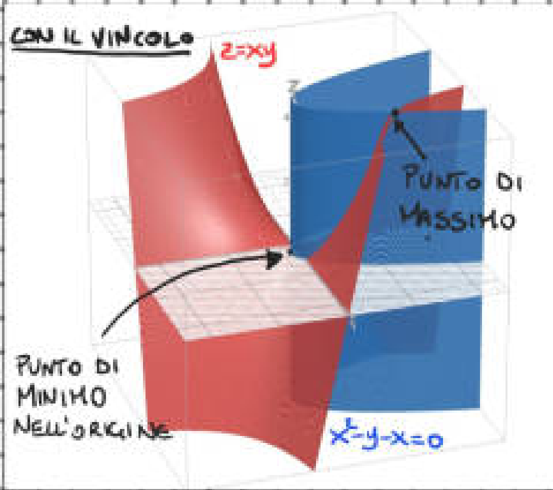
$$\begin{matrix} z''_{xx} = 0 \\ z''_{xy} = 1 \end{matrix} \quad \text{E} \quad \begin{matrix} z''_{yy} = 0 \\ z''_{yx} = 1 \end{matrix}$$

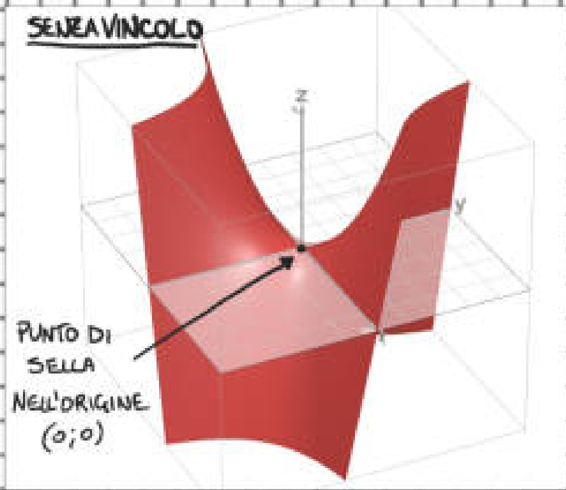
COSÌ

$$H \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 0 - 1^2 = -1 < 0$$

CIOÈ IL PUNTO $P(0;0)$ È UN PUNTO DI SELLA

IL TUTTO SI PUÒ FACILMENTE VERIFICARE MEDIANTE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE z E DELL'ESPRESSIONE DEL VINCOLO:





2 DETERMINARE MASSIMI E MINIMI DELLA FUNZIONE

$$z = x^2 + y^2$$

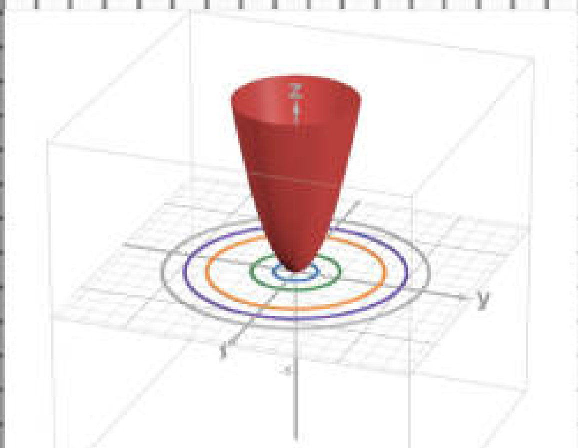
SOTTO IL VINCOLO

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

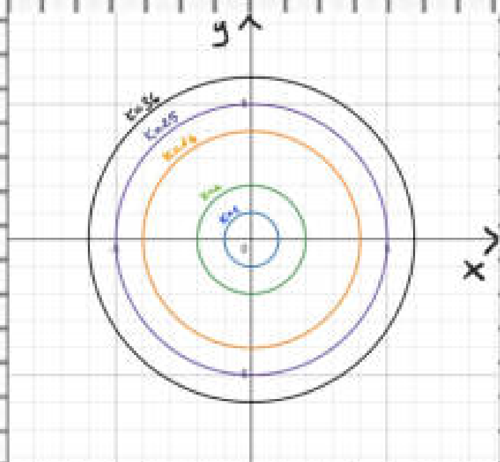
VISTO CHE IL VINCOLO È UNA EQUAZIONE NON LINEARE PER ENTRAMBE LE VARIABILI DETERMINIAMO EVENTUALI MASSIMI O MINIMI VINCOLATI MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO, CHE HANNO EQUAZIONE:

$$x^2 + y^2 = k$$

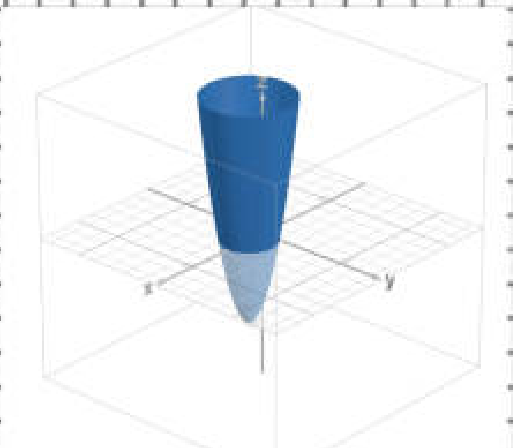
E RAPPRESENTANO NEL PIANO BASE XY DELLE CIRCONFERENZE CON CENTRO NELL'ORIGINE (0;0) E RAGGIO $r = \sqrt{k}$, CIOÈ



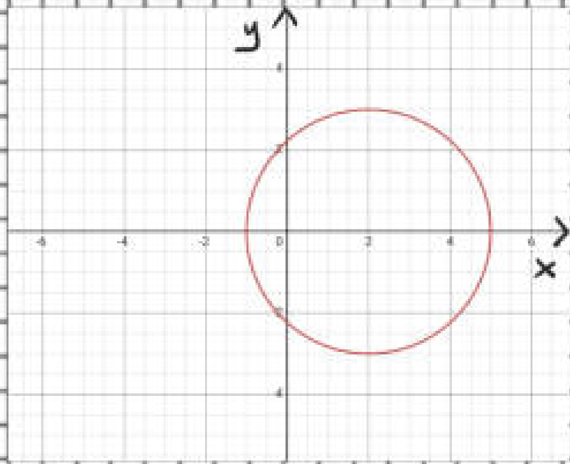
$\Longrightarrow$



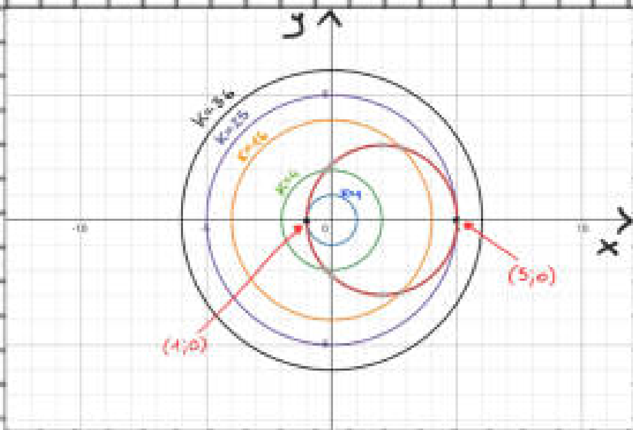
MENTRE L'EQUAZIONE DEL VINCOLO NEL PIANO BASE XY RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA CON CENTRO (2;0) E RAGGIO 3



$\Rightarrow$



COSÌ I PUNTI DI TANGENZA TRA LE LINEE DI LIVELLO DELLA FUNZIONE E LA LINEA DEL VINCOLO SI HANNO NELLE COORDINATE (1;0) E (5;0).



TALI VALORI SI OTTENGONO RISOLVENDO IL SISTEMA TRA L'ESPRESSIONE DEL VINCOLO E L'ESPRESSIONE DELLA LINEA DI LIVELLO GENERICA, CIOÈ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-5=0 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$$

CHE È UN SISTEMA DI 4° GRADO CHE POSSIAMO RISOLVERE CON IL METODO DI RIDUZIONE SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO LE DUE EQUAZIONI, OTTENENDO

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-5=0 \\ -4x-5=-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-5=0 \\ 4x+5=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-5=0 \\ x=\frac{k-5}{4} \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO SOSTITUENDO X NELLA PRIMA EQUAZIONE OTTENIAMO L'EQUAZIONE RISOLVENTE:

$$x^2+y^2-4x-5=0$$

$$\left(\frac{k-5}{4}\right)^2+y^2-\cancel{4}\left(\frac{k-5}{\cancel{4}}\right)-5=0$$

$$\frac{k^2-10k+25}{16}+y^2-k+\cancel{5}-\cancel{5}=0$$

$$k^2-10k+25+16y^2-16k=0$$

$$16y^2+\left(k^2-26k+25\right)=0$$

VISTO CHE I PUNTI DI TANGENZA TRA DUE CURVE SI HANNO PER SOLUZIONI COINCIDENTI, ALLORA PER OTTENERE LE LINEE DI LIVELLO TANGENTI IMPONIAMO CHE IL DISCRIMINANTE (DELTA) DELL'EQUAZIONE RISOLVENTE SIA NULLO ED ESSENDO IN ESSA

$$a=16 \quad b=0 \quad c=k^2-26k+25$$

ALLORA

$$\Delta=b^2-4ac=0 \Leftrightarrow b^2=4ac \Leftrightarrow c=\frac{b}{4a} \Leftrightarrow c=\frac{0}{64}=0$$

COSÌ

$$k^2-26k+25=0$$

$$k_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4\cdot25}}{2}=\frac{26\pm\sqrt{576}}{2}$$

$$k_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{26-24}{2}=\dfrac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1}}=1\\[2ex]\dfrac{26+24}{2}=\dfrac{\cancel{50}^{\,25}}{\cancel{2}_{\,1}}=25\end{cases}$$

QUINDI LA LINEA DEL VINCOLO È TANGENTE CON LA LINEA DI LIVELLO PER $K=1$ NEL PUNTO $(1;0)$ CON UNA TANGENZA INTERNA ALLORA

$P_1(1;0)$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON $Z=1$

MENTRE È TANGENTE CON LA LINEA DI LIVELLO PER $K=25$ NEL PUNTO $(5;0)$ CON UNA TANGENZA ESTERNA ALLORA

$P_2(5;0)$ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO CON $Z=25$

3 DETERMINARE MASSIMI E MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$Z=2X+Y$$

SOTTOPOSTA AL VINCOLO

$$X^2+Y^2=5$$

NON POTENDO APPLICARE IL METODO PER SOSTITUZIONE PROCEDIAMO CON IL METODO DELLE LINEE DI LIVELLO DALL'ESPRESSIONE

$$2X+Y=K$$

POSSIAMO VERIFICARE CHE LE LINEE DI LIVELLO SONO UN FASCIO DI RETTE IMPROPRIE CON COEFFICIENTE ANGOLARE $m=-2$, CIOÈ

$$Y=-2X+K$$

MENTRE IL VINCOLO È L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA CON CENTRO $(0;0)$ E RAGGIO $r=\sqrt{5}$

DOVENDO CERCARE LE LINEE DI LIVELLO TANGENTI ALLA LINEA O CURVA DEL VINCOLO, ALLORA DOBBIAMO IMPORRE CHE LA DISTANZA DELLA GENERICA LINEA DI LIVELLO DAL

CENTRO DELLA CIRCONFERENZA CHE RAPPRESENTA IL VINCOLO SIA PROPRIO PARI AL RAGGIO, COSÌ RICORDANDO IL CALCOLO DELLA DISTANZA DI UN PUNTO $P(x_P; y_P)$ DA UNA RETTA IN FORMA IMPLICITA $ax+by+c=0$ E CIOÈ

$$d=\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ED ESSENDO $P(0;0)$, CIOÈ IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA MENTRE L'EQUAZIONE DELLA RETTA IN FORMA IMPLICITA È

$$2x+y-k=0$$

CON $a=2$, $b=1$ E $c=-k$, ALLORA

$$\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\text{raggio} \Rightarrow \frac{|-k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

DALLA QUALE

$$|-k|=5 \begin{cases} -k=5 \\ -k=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k=-5 \\ k=+5 \end{matrix}$$

COSÌ PER DETERMINARE I PUNTI DI TANGENZA BISOGNA METTERE A SISTEMA LA CIRCONFERENZA DEL VINCOLO E LE LINEE DI LIVELLO CON $k=\pm 5$, CIOÈ RISOLVERE I 2 SISTEMI:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x+y-5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x+y+5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=-2x+5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=-2x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+(-2x+5)^2=5 \\ y=-2x+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x^2-20x+25=5 \\ y=-2x+5 \end{cases}$$

$$5x^2-20x+20=0$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}}=2$$

$$y=-2(2)+5=1$$

$$P_1(2;1)$$

$$\begin{cases} x^2+(-2x-5)^2=5 \\ y=-2x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x^2+20x+25=5 \\ y=-2x-5 \end{cases}$$

$$5x^2+20x+20=0$$

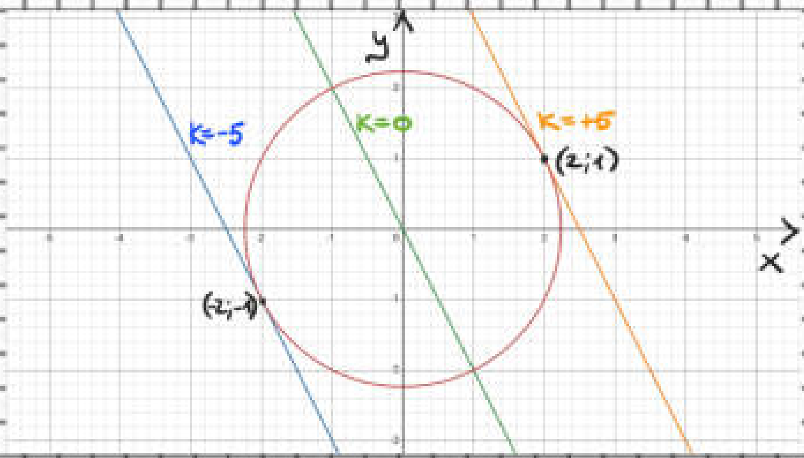
$$x^2+4x+4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 0}{2}=-\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}}=-2$$

$$y=-2(-2)-5=-1$$

$$P_2(-2;-1)$$

A QUESTO PUNTO RAPPRESENTIAMO GRAFICAMENTE LE LINEE DI LIVELLO E LA CIRCONFERENZA DEL VINCOLO:



E DALL'ANDAMENTO DEI VALORI DI K SI DEDUCE CHE

$P_1(2;1)$ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z=5$
$P_2(-2;-1)$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z=-5$

4 DETERMINARE MASSIMI E MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE $z=x^2+y^2$

SOTTOPOSTA AL VINCOLO

$$x+y-2=0$$

VISTO CHE IL VINCOLO È LINEARE APPLICHIAMO IL METODO PER SOSTITUZIONE, COSÌ

$$x+y-2=0 \Rightarrow y=-x+2$$

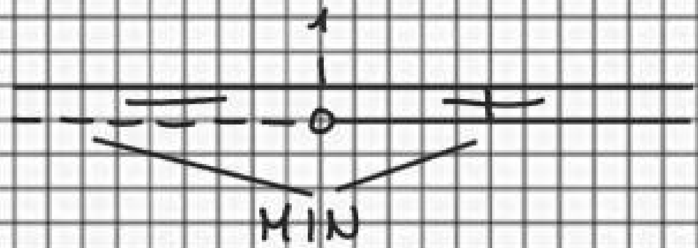
E $$z=x^2+(-x+2)^2=x^2+x^2-4x+4=2x^2-4x+4$$

$$z'=4x-4$$

$$z'=0 \Rightarrow 4x-4=0 \Rightarrow x=1$$

$$z'>0 \Rightarrow x>1$$

QUINDI



DAL VINCOLO

$$y=-x+2=-1+2=1 \Rightarrow P(1;1)$$

$$\boxed{P(1;1) \text{ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON } z=1^2+1^2=2}$$

5 DETERMINARE MASSIMI E MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$z=x^2-y^2$$

SOTTOPOSTA AL VINCOLO

$$2x+y-3=0$$

ANCHE IN QUESTO CASO POSSIAMO APPLICARE IL METODO PER SOSTITUZIONE.

$$2x+y-3=0 \Rightarrow y=-2x+3$$

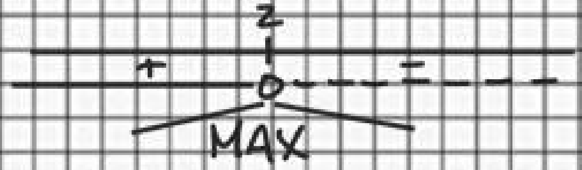
COSÌ $$z=x^2-(-2x+3)^2=x^2-(4x^2-12x+9)=-3x^2+12x-9$$

$z' = -6x + 12$

$z' = 0 \Rightarrow -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$z' > 0 \Rightarrow -6x + 12 > 0 \Rightarrow x < 2$

QUINDI



DAL VINCOLO

$y = -2x + 3 = -2(2) + 3 = -1 \Rightarrow P(2;-1)$

$\boxed{P(2;1) \text{ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO CON } z = 2^2 - 1^2 = 3}$

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

L'ULTIMO PASSO NELL'ANALISI DI UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI CONSISTE NELLA DETERMINAZIONE DI EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO ALL'INTERNO DI INTERVALLI CHIUSI E LIMITATI DEL DOMINIO DELLA FUNZIONE.

IN GENERALE SE CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE f CON DOMINIO D ED UN SOTTOINSIEME S CHIUSO E LIMITATO DEL DOMINIO, CIOÈ $S \subseteq D$, SE LA FUNZIONE f È CONTINUA IN S, IL TEOREMA DI WEIERSTRASS CI GARANTISCE CHE LA FUNZIONE AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTO.

RICERCA DI MAX O MIN ASSOLUTI CON LE DERIVATE

CONSIDERATA UNA FUNZIONE

$$f: D \to \mathbb{R}$$

CONTINUA E DIFFERENZIABILE, ED UN SOTTOINSIEME DEL DOMINIO

$$S \subseteq D$$

CHIUSO E LIMITATO, PER DETERMINARE I MASSIMI O MINIMI ASSOLUTI DELLA FUNZIONE NEL SOTTOINSIEME S BISOGNA:

a DETERMINARE I MASSIMI ED I MINIMI LIBERI APPARTENENTI AL SOTTOINSIEME S.

b DETERMINARE I MASSIMI ED I MINIMI VINCOLATI DOVE I VINCOLI SONO LE EQUAZIONI DELLE LINEE O CURVE CHE COSTITUISCONO LA FRONTIERA (IL CONTORNO) DEL SOTTOINSIEME S.

c CONFRONTARE IL VALORE DELLA FUNZIONE IN TUTTI I PUNTI TROVATI IN MODO DA DETERMINARE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTO.

ESEMPI

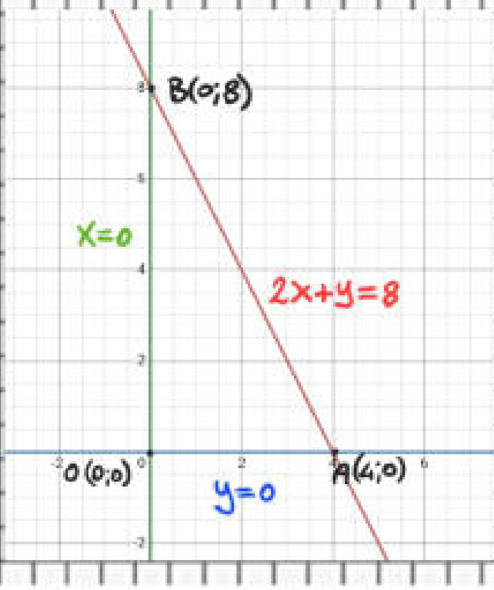
1 DETERMINARE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI DELLA FUNZIONE

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

ALL'INTERNO DEL SOTTOINSIEME S RAPPRESENTATO DAL POLIGONO DI LATI:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

CIOÈ GRAFICAMENTE:



CHE È IL TRIANGOLO DI VERTICI $O(0;0)$ $A(4;0)$ E $B(0;8)$.
VISTO CHE IL SOTTOINSIEME S È CHIUSO E LIMITATO E LA FUNZIONE È CONTINUA IN ESSO, PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTONO MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI.
PER PRIMA COSA DETERMINIAMO MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI IN S.

$$z'_x = 2x-2 \quad E \quad z'_y = 2y-4$$

COSÌ

$$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

CIOÈ $P_1(1;2)$ PUNTO CRITICO APPARTENENTE AD S

MA

$$z''_{xx}=2 \quad z''_{yy}=2 \quad z''_{xy}=0 \quad z''_{yx}=0 \Rightarrow H = 2\cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$$

QUINDI

$P_1(1;2)$ MINIMO RELATIVO LIBERO CON $z=-5$

COME SECONDO PASSO DETERMINIAMO MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI CONSIDERANDO LA FRONTIERA DI S, CIOÈ IL SUO CONTORNO COSTITUITO DAI TRE LATI DEL TRIANGOLO CHE SONO I SEGMENTI $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ E $\overline{BO}$, COSÌ:

→ MAX E MIN VINCOLATI SU $\overline{OA}$

$$z = x^2+y^2-2x-4y$$

CON VINCOLO

$$y=0$$

E

$$0 \leq x \leq 4$$

UTILIZZANDO IL METODO PER SOSTITUZIONE SOSTITUIAMO y NELLA FUNZIONE

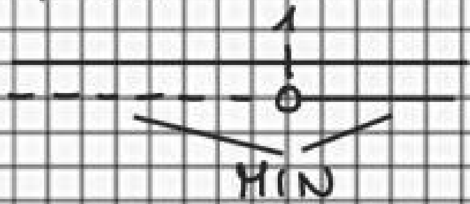
$$z = x^2+0^2-2x-4\cdot y = x^2-2x$$

COSÌ

$z' = 2x - 2$

$z' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$z' > 0 \Rightarrow x > 1$



CIOÈ $P(1;0)$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z = -1$

INOLTRE AGLI ESTREMI DEL SEGMENTO $\overline{OA}$, CIOÈ NEI PUNTI $O(0;0)$ ED $A(4;0)$, LA FUNZIONE ASSUME

$z(0;0) = 0$ E $z(4;0) = 4^2 + 0^2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 8$

QUINDI SUL LATO $\overline{OA}$ LA FUNZIONE ASSUME

$z(1;0) = -1$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO $\Rightarrow P_2(1;0)$

$z(4;0) = 8$ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO $\Rightarrow P_3(4;0)$

→ MAX E MIN VINCOLATI SU $\overline{AB}$

$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$

CON VINCOLO

$2x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 2x$

E

$0 \leq x \leq 4$

UTILIZZANDO IL METODO PER SOSTITUZIONE SOSTITUIAMO y NELLA FUNZIONE

$z = x^2 + (8 - 2x)^2 - 2x - 4(8 - 2x)$

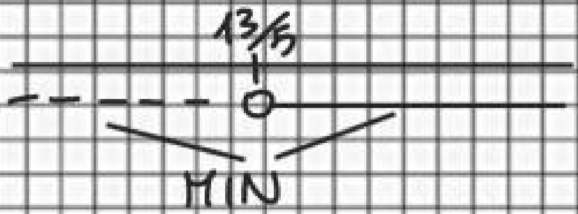
$z = x^2 + 64 - 32x + 4x^2 - 2x - 32 + 8x$

$z = 5x^2 - 26x + 32$

$z' = 10x - 26$

$z' = 0 \Rightarrow 10x - 26 = 0 \Rightarrow x = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$

$z' > 0 \Rightarrow x > \frac{13}{5}$



DAL VINCOLO

$$y = 8 - 2x = 8 - 2\frac{13}{5} = 8 - \frac{26}{5} = \frac{14}{5}$$

MENTRE

$$z = 5\left(\frac{13}{5}\right)^2 - 26 \cdot \frac{13}{5} + 32 = \frac{169}{5} - \frac{338}{5} + \frac{160}{5} = -\frac{9}{5}$$

CIOÈ $P\left(\frac{13}{5}; \frac{14}{5}\right)$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z = -\frac{9}{5}$

INOLTRE AGLI ESTREMI DEL SEGMENTO $\overline{AB}$, CIOÈ NEI PUNTI $A(4;0)$ ED $B(0;8)$, LA FUNZIONE ASSUME

$$z(4;0) = 8 \quad \text{E} \quad z(0;8) = 0^2 + 8^2 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 8 = 32$$

QUINDI SUL LATO $\overline{AB}$ LA FUNZIONE ASSUME

$z\left(\frac{13}{5}; \frac{14}{5}\right) = -\frac{9}{5}$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO $\Rightarrow P_4\left(\frac{13}{5}; \frac{14}{5}\right)$

$z(0;8) = 32$ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO $\Rightarrow P_5(0;8)$

→ MAX E MIN VINCOLATI SU $\overline{BO}$

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

CON VINCOLO

$$x = 0$$

E

$$0 \le y \le 8$$

SOSTITUIAMO X NELLA FUNZIONE

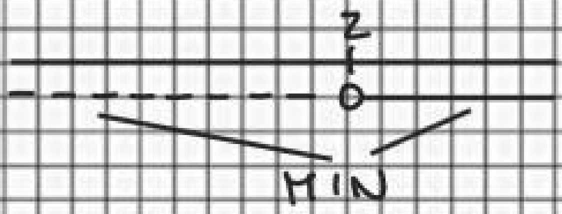
$$z = 0^2 + y^2 - 2 \cdot 0 - 4y = y^2 - 4y$$

COSÌ

$$z' = 2y - 4$$

$$z' = 0 \Rightarrow 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$z' > 0 \Rightarrow y > 2$



CIOÈ $P(0;2)$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO CON $z=-4$
INOLTRE AGLI ESTREMI DEL SEGMENTO $\overline{BO}$, CIOÈ NEI PUNTI $B(0;8)$ ED $O(0;0)$, LA FUNZIONE ASSUME

$z(0;8)=32$ E $z(0;0)=0^2+0^2-2\cdot0-4\cdot0=0$

QUINDI SUL LATO $\overline{BO}$ LA FUNZIONE ASSUME

$z(0;8)=32$ MASSIMO RELATIVO VINCOLATO $\Rightarrow P_5(0;8)$
$z(0;2)=-4$ MINIMO RELATIVO VINCOLATO $\Rightarrow P_6(0;2)$

COSÌ IN DEFINITIVA BISOGNA CERCARE TRA TUTTI I PUNTI TROVATI IL MASSIMO ED IL MINIMO ASSOLUTI DELLA FUNZIONE NEL SOTTOINSIEME S, CIOÈ:

$\boxed{P_1(1;2) \text{ CON } z=-5 \quad \text{MINIMO ASSOLUTO}}$

$P_2(1;0)$ CON $z=-1$

$P_3(4;0)$ CON $z=8$

$P_4\left(\frac{13}{5};\frac{14}{5}\right)$ CON $z=-\frac{9}{5}$

$\boxed{P_5(0;8) \text{ CON } z=32 \quad \text{MASSIMO ASSOLUTO}}$

$P_6(0;2)$ CON $z=-4$

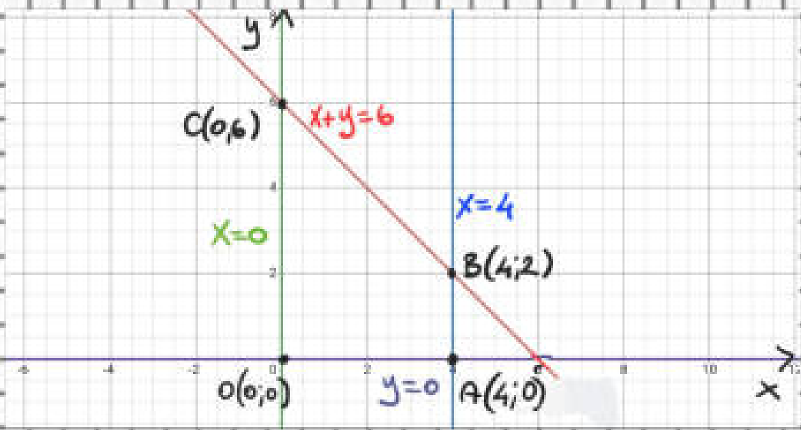
2 DETERMINARE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI DELLA FUNZIONE

$$z = xy$$

ALL'INTERNO DEL SOTTOINSIEME DEFINITO DAL VINCOLO

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

CHE GRAFICAMENTE È



IL POLIGONO DI LATI $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ E $\overline{CO}$

DETERMINIAMO MASSIMI O MINIMI RELATIVI LIBERI

$$z'_x = y \qquad z'_y = x$$

COSÌ

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P(0;0)$$ PUNTO CRITICO CHE APPARTIENE AL SOTTOINSIEME

ED ESSENDO

$$\begin{matrix} z''_{xx} = 0 & z''_{yy} = 0 \\ z''_{xy} = 1 & z''_{yx} = 1 \end{matrix} \Rightarrow H = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$$

ALLORA $P(0;0)$ È UN PUNTO DI SELLA.

DETERMINIAMO MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI SULLA FRONTIERA DEL SOTTOINSIEME, CIOÈ SUI LATI $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ E $\overline{CO}$.

→ MAX E MIN VINCOLATI SU $\overline{OA}$

$z = xy$

CON VINCOLO

$y = 0$

SOSTITUIAMO QUINDI Y NELLA FUNZIONE

$z = x \cdot 0 = 0$ NESSUN PUNTO CRITICO

VERIFICHIAMO IL VALORE DI Z SULL'ESTREMO DESTRO DI $\overline{OA}$ (VISTO CHE L'ESTREMO SINISTRO È UN PUNTO DI SELLA):

$$P_1(4;0) \Rightarrow z(4;0) = 0$$

→ MAX E MIN VINCOLATI SU $\overline{AB}$

$z = xy$

CON VINCOLO

$x = 4$

COSÌ

$z = 4y$

$z' = 4$

$z' = 0 \Rightarrow$ MAI NESSUN PUNTO CRITICO

MENTRE SULL'ESTREMO DI $\overline{AB}$:

$$P_2(4;2) \Rightarrow z = 8$$

→ MAX E MIN VINCOLATI SU $\overline{BC}$

$z = xy$

CON VINCOLO

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow y = 6 - x$$

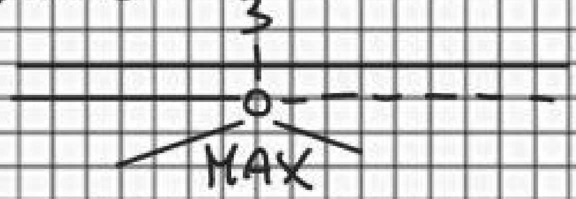
COSÌ

$z = x(6-x) = 6x - x^2$

$z' = 6 - 2x$

$z' = 0 \Rightarrow 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

$z' > 0 \Rightarrow x < 3$



DAL VINCOLO

$y = 6 - x = 6 - 3 = 3$

CIOÈ $P(3;3)$ CON $Z = 9$ È PUNTO DI MASSIMO RELATIVO VINCOLATO.

VERIFICHIAMO IL VALORE DI Z NELL'ESTREMO $(0;6)$

$$P(0;6) \quad Z = 0$$

IN DEFINITIVA ALLORA

$P(0;6)$ CON $Z = 0$ PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

$P(3;3)$ CON $Z = 9$ PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO