# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

## MASSIMO PROFITTO DI UN'IMPRESA
### IN CONDIZIONI DI LIBERA CONCORRENZA

SE CONSIDERIAMO UN'IMPRESA CHE PRODUCE DUE BENI CON QUANTITÀ $q_1$ E $q_2$ E VENDE TALI BENI AI PREZZI $P_1$ E $P_2$ SAPENDO CHE TALI PREZZI IN LIBERA CONCORRENZA SONO FISSI ED INDIPENDENTI DALLE QUANTITÀ RICHIESTE ED IPOTIZZANDO CHE LA FUNZIONE DEI COSTI SIA NOTA, CIOÈ

$$C(q_1;q_2)$$

CONSIDERATA LA FUNZIONE RICAVO

$$R=P_1\cdot q_1+P_2\cdot q_2$$

LA FUNZIONE PROFITTO O UTILE DA MASSIMIZZARE È

$$\Pi=R-C=P_1 q_1+P_2 q_2-C(q_1;q_2)$$

## ESEMPIO

UN'IMPRESA CHE PRODUCE DUE BENI LI VENDE IN UN MERCATO DI CONCORRENZA PERFETTA AI PREZZI

$$P_1=€\,320 \quad E \quad P_2=€\,510$$

IL COSTO DI PRODUZIONE DI ENTRAMBI I BENI CIOÈ LA FUNZIONE DEI COSTI, È RAPPRESENTATA DALLA SEGUENTE RELAZIONE:

$$C(q_1;q_2)=q_1^2+q_1\cdot q_2+2q_2^2$$

DOVE $q_1$ E $q_2$ SONO LE QUANTITÀ PRODOTTE DEI DUE BENI.

DETERMINIAMO LA COMBINAZIONE PRODUTTIVA DEI DUE BENI CHE MASSIMIZZA IL PROFITTO.

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

IL PROFITTO È DATO DA

$$\Pi = R - C = 320q_1 + 510q_2 - (q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2)$$

CIOÈ

$$\Pi = 320q_1 + 510q_2 - q_1^2 - q_1q_2 - 2q_2^2$$

PER DETERMINARE I VALORI DI $q_1$ E $q_2$ CHE MASSIMIZZANO LA FUNZIONE DEL PROFITTO $\Pi$ CALCOLIAMO LE SUE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A $q_1$ E $q_2$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 320 - 2q_1 - q_2 \quad \text{E} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 510 - q_1 - 4q_2$$

ANNULLANDOLE ENTRAMBE OTTENIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} 320 - 2q_1 - q_2 = 0 \\ 510 - q_1 - 4q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q_1 + q_2 = 320 \\ q_1 + 4q_2 = 510 \end{cases}$$

DAL QUALE OTTENIAMO:

$$\begin{cases} 2(510 - 4q_2) + q_2 = 320 \\ q_1 = 510 - 4q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1020 - 8q_2 + q_2 = 320 \\ q_1 = 510 - 4q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7q_2 = 320 - 1020 \\ q_1 = 510 - 4q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7q_2 = 700 \\ q_1 = 510 - 4q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 100 \\ q_1 = 510 - 4 \cdot 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = 110 \\ q_2 = 100 \end{cases}$$

ED IL PROFITTO PER TALI VALORI SARÀ

$$\Pi(110; 100) = 320 \cdot 110 + 510 \cdot 100 - 110^2 - 110 \cdot 100 - 2 \cdot 100^2 = € 43100$$

A QUESTO PUNTO PER VERIFICARE LA COPPIA DI VALORI $(110; 100)$ SIA UN PUNTO DI MASSIMO PER LA FUNZIONE DEL PROFITTO $\Pi$ DETERMINIAMO LE SUE DERIVATE

PARZIALI SECONDE, CIOÉ

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 q_1} = -1 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} = -4$$

E CALCOLIAMO L'HESSIANO:

$$H = (-2)(-4) - (-1)^2 = 8 - 1 = 7 > 0$$

E VISTO CHE

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = -2 < 0$$

ALLORA IL PUNTO (110;100) È UN PUNTO DI MASSIMO PER LA FUNZIONE PROFITTO $\Pi$ COSÌ SI PUÓ AFFERMARE CHE LA COMBINAZIONE PRODUTTIVA CHE MASSIMIZZA IL PROFITTO È QUELLA IN CUI

$$q_1 = 110 \quad \text{E} \quad q_2 = 100$$

# MASSIMO PROFITTO DI UN'IMPRESA

## IN CONDIZIONI DI MONOPOLIO

SE CONSIDERIAMO UN'IMPRESA CHE PRODUCE DUE BENI CON QUANTITÁ $q_1$ E $q_2$ E VENDE TALI BENI AI PREZZI $P_1$ E $P_2$ SAPPIAMO CHE TALI PREZZI IN CONDIZIONI DI MONOPOLIO NON SONO COSTANTI MA DIPENDONO DALLE FUNZIONI DI DOMANDA DEI DUE PRODOTTI, CHE COME ABBIAMO VISTO POSSONO ESSERE:

- SUCCEDANEI O SURROGATI, CIOÉ L'AUMENTO DI PREZZO DELL'UNO GENERA UN AUMENTO DELLA DOMANDA DELL'ALTRO.

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

★ COMPLEMENTARI, CIOÈ L'AUMENTO DI PREZZO DELL'UNO GENERA UNA DIMINUZIONE DELLA DOMANDA DI ENTRAMBI.

## ESEMPIO

UN'IMPRESA PRODUCE DUE BENI SURROGATI E LI VENDE IN CONDIZIONI DI MONOPOLIO.
LE LEGGI DELLA DOMANDA SONO ESPRESSE DALLE SEGUENTI RELAZIONI:

$$q_1 = 1000 - 3P_1 + P_2 \quad \text{E} \quad q_2 = 800 + 2P_1 - 4P_2$$

LA FUNZIONE DEI COSTI È DATA DALLA RELAZIONE

$$C(q_1; q_2) = 180\,q_1 + 230\,q_2$$

DETERMINIAMO LA COMBINAZIONE PRODUTTIVA DEI DUE BENI CHE MASSIMIZZA IL PROFITTO.
DALLE LEGGI DELLA DOMANDA RICAVIAMO I PREZZI $P_1$ E $P_2$ IN FUNZIONE DELLE QUANTITÀ $q_1$ E $q_2$, CIOÈ RISOLVIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} q_1 = 1000 - 3P_1 + P_2 \\ q_2 = 800 + 2P_1 - 4P_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3P_1 = 1000 - q_1 + P_2 \\ 2P_1 = -800 + q_2 + 4P_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1000}{3} - \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}P_2 \\ P_1 = -400 + \frac{1}{2}q_2 + 2P_2 \end{cases} \Rightarrow P_1 = P_1$$

CIOÈ

$$\frac{1000}{3} - \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}P_2 = -400 + \frac{1}{2}q_2 + 2P_2$$

COSÌ

$$\frac{1}{3}P_2 - 2P_2 = -400 + \frac{1}{2}q_2 - \frac{1000}{3} + \frac{1}{3}q_1$$

$$\frac{2P_2-12P_2}{\cancel{6}}=\frac{-2400+3q_2-2000+2q_1}{\cancel{6}}$$

$$-10P_2=-4400+3q_2+2q_1$$

$$P_2=\frac{-4400+2q_1+3q_2}{-10}$$

$$P_2=440-0{,}2q_1-0{,}3q_2$$

E

$$P_1=-400+\frac{1}{2}q_2+2(440-0{,}2q_1-0{,}3q_2)=$$

$$=-400+880-0{,}4q_1+\frac{1}{2}q_2-0{,}6q_2=$$

$$=480-0{,}4q_1+\frac{q_2-1{,}2q_2}{2}=480-0{,}4q_1-0{,}1q_2$$

QUINDI

$$P_1=480-0{,}4q_1-0{,}1q_2 \quad E \quad P_2=440-0{,}2q_1-0{,}3q_2$$

A QUESTO PUNTO ALLORA SCRIVIAMO LA FUNZIONE DEL RICAVO, CIOÈ

$$R=P_1q_1+P_2q_2=q_1(480-0{,}4q_1-0{,}1q_2)+q_2(440-0{,}2q_1-0{,}3q_2)$$

COSÌ LA FUNZIONE PROFITTO È

$$\Pi=R-C=q_1(480-0{,}4q_1-0{,}1q_2)+q_2(440-0{,}2q_1-0{,}3q_2)-(180q_1+230q_2)$$

E SVILUPPANDO ED ORDINANDO OTTENIAMO:

$$\Pi=480q_1-0{,}4q_1^2-0{,}1q_1q_2+440q_2-0{,}2q_1q_2-0{,}3q_2^2-180q_1-230q_2$$

$$\Pi=300q_1-0{,}4q_1^2-0{,}3q_1q_2+210q_2-0{,}3q_2^2$$

$$\Pi=-0{,}4q_1^2-0{,}3q_1q_2-0{,}3q_2^2+300q_1+210q_2$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A $q_1$ E $q_2$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -0{,}8q_1 - 0{,}3q_2 + 300 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -0{,}3q_1 - 0{,}6q_2 + 210$$

LE ANNULLIAMO ED OTTENIAMO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} -0{,}8q_1 - 0{,}3q_2 + 300 = 0 \\ -0{,}3q_1 - 0{,}6q_2 + 210 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}8q_1 + 0{,}3q_2 = 300 \\ 0{,}3q_1 + 0{,}6q_2 = 210 \end{cases}$$

MOLTIPLICANDO PER 2 LA PRIMA EQUAZIONE E SCRIVENDO AL SUO POSTO LA DIFFERENZA TRA LA PRIMA E LA SECONDA (CIOÈ RISOLVIAMO IL SISTEMA COL METODO DI RIDUZIONE)

$$\begin{cases} 1{,}6q_1 - 0{,}3q_1 + \cancel{0{,}6q_2} - \cancel{0{,}6q_2} = 600 - 210 \\ 0{,}3q_1 + 0{,}6q_2 = 210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}3q_1 = 390 \\ 0{,}3q_1 + 0{,}6q_2 = 210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 300 \\ q_2 = \dfrac{210 - 0{,}3 \cdot 300}{0{,}6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 300 \\ q_2 = 200 \end{cases}$$

QUINDI PER VERIFICARE SE LA COPPIA (300;200) È UN PUNTO DI MASSIMO PER LA FUNZIONE PROFITTO $\Pi$ CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE E DETERMINIAMO L'HESSIANO:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = -0{,}8 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial q_2 \partial q_1} = -0{,}3 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} = -0{,}6$$

QUINDI

$$H = (-0{,}8)(-0{,}6) - (-0{,}3)^2 = 0{,}48 - 0{,}09 = 0{,}39$$

COSÌ VISTO CHE $H > 0$ E $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} < 0$

ALLORA IL PUNTO $(q_1; q_2) = (300; 200)$ È UN MASSIMO PER $\Pi$ E DI CONSEGUENZA LA COMBINAZIONE PRODUTTIVA CHE MASSIMIZZA IL PROFITTO È $q_1 = 300$ E $q_2 = 200$ CON UN

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

PROFITTO PARI A

$$\Pi(300;200) = -0{,}4(300)^2 - 0{,}3 \cdot 300 \cdot 200 - 0{,}3(200)^2 + 300 \cdot 300 + 210 \cdot 200$$

$$\Pi = -36000 - 18000 - 12000 + 90000 + 42000$$

$$\Pi = 66000$$

E VENDENDO I BENI AI PREZZI

$$p_1 = 480 - 0{,}4 \cdot 300 - 0{,}1 \cdot 200 = 340$$

$$p_2 = 440 - 0{,}2 \cdot 300 - 0{,}3 \cdot 200 = 320$$

## MASSIMO PROFITTO DI UN'IMPRESA

### CHE VENDE UN PRODOTTO IN DUE MERCATI DIVERSI

CONSIDERIAMO UN'IMPRESA MONOPOLISTA CHE VENDE LO STESSO PRODOTTO IN DUE DIVERSI MERCATI, AD ESEMPIO QUELLO INTERNO E QUELLO ESTERO, E DEVE DECIDERE SE APPLICARE PREZZI DIVERSI O UGUALI DETERMINANDO QUALI QUANTITÀ $q_1$ E $q_2$ DEVE IMMETTERE SUI DUE MERCATI MASSIMIZZANDO IL PROFITTO E TENENDO CONTO DEL FATTO CHE LE LEGGI DELLA DOMANDA NEI DUE MERCATI SONO DIVERSE.

## ESEMPIO

SUPPONIAMO CHE PER LO STESSO PRODOTTO NEL MERCATO INTERNO ED IN QUELLO ESTERO LA DOMANDA È DATA RISPETTIVAMENTE DA:

$$q_1 = 334 - 0{,}4 p_1 \qquad \text{E} \qquad q_2 = 111 - 0{,}1 p_2$$

LA FUNZIONE DEI COSTI È RAPPRESENTATA DALLA SEGUENTE RELAZIONE

$$C = 1000 + 10q + 0{,}2q^2 \qquad \text{DOVE } q = q_1 + q_2$$

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

DETERMINIAMO QUALI QUANTITÀ BISOGNA IMMETTERE NEI DUE MERCATI PER MASSIMIZZARE IL PROFITTO NEI CASI:

a) IL PRODOTTO VIENE VENDUTO A PREZZI DIVERSI, $P_1 \neq P_2$

b) IL PRODOTTO VIENE VENDUTO A PREZZI UGUALI, $P_1 = P_2$

**a** $P_1 \neq P_2$ (DISCRIMINANDO IL PREZZO)

RICAVIAMO I PREZZI DALLE LEGGI DELLA DOMANDA

$$q_1 = 334 - 0{,}4P_1 \qquad\qquad q_2 = 111 - 0{,}1P_2$$

$$0{,}4P_1 = 334 - q_1 \qquad \text{E} \qquad 0{,}1P_2 = 111 - q_2$$

$$P_1 = 835 - 2{,}5q_1 \qquad\qquad P_2 = 1110 - 10q_2$$

SCRIVIAMO LA FUNZIONE PROFITTO

$$\Pi = R - C = q_1 \cdot P_1 + q_2 \cdot P_2 - (1000 + 10q + 0{,}2q^2) =$$

$$= q_1(835 - 2{,}5q_1) + q_2(1110 - 10q_2) - 1000 - 10(q_1 + q_2) - 0{,}2(q_1 + q_2)^2 =$$

$$= 835q_1 - 2{,}5q_1^2 + 1110q_2 - 10q_2^2 - 1000 - 10q_1 - 10q_2 - 0{,}2(q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2) =$$

$$= 825q_1 - 2{,}5q_1^2 + 1100q_2 - 10q_2^2 - 1000 - 0{,}2q_1^2 - 0{,}4q_1q_2 - 0{,}2q_2^2 =$$

CIOÈ $$\Pi = -2{,}7q_1^2 - 0{,}4q_1q_2 - 10{,}2q_2^2 + 825q_1 + 1100q_2 - 1000$$

DETERMINIAMO LE SUE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A $q_1$ E $q_2$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -5{,}4q_1 - 0{,}4q_2 + 825 \qquad \text{E} \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -0{,}4q_1 - 20{,}4q_2 + 1100$$

LE UGUAGLIAMO A ZERO ED OTTENIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} -5{,}4q_1 - 0{,}4q_2 + 825 = 0 \\ -0{,}4q_1 - 20{,}4q_2 + 1100 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5{,}4q_1 + 0{,}4q_2 = 825 \\ 0{,}4q_1 + 20{,}4q_2 = 1100 \end{cases}$$

DAL QUALE RICAVIAMO I VALORI DI $q_1$ E $q_2$. CIOÈ

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{825 - 0,4\,q_2}{5,4} \\ q_1 = \dfrac{1100 - 20,4\,q_2}{0,4} \end{cases} \Rightarrow \frac{825 - 0,4\,q_2}{5,4} = \frac{1100 - 20,4\,q_2}{0,4}$$

$$\Rightarrow 0,4(825 - 0,4\,q_2) = 5,4(1100 - 20,4\,q_2)$$

$$330 - 0,16\,q_2 = 5940 - 110,16\,q_2$$

$$110,16\,q_2 - 0,16\,q_2 = 5940 - 330$$

$$110\,q_2 = 5610$$

$$q_2 = 51$$

E

$$q_1 = \frac{825 - 0,4 \cdot 51}{5,4} = 149 \quad \text{CIOÈ } (q_1; q_2) = (149; 51)$$

CALCOLIAMO L'HESSIANO PER $\Pi$ E VERIFICHIAMO SE TALE COPPIA $(q_1; q_2)$ È UN MASSIMO.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = -5,4 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial q_2 \partial q_1} = -0,4 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -20,4$$

$$H = (-5,4)(-20,4) - (-0,4)^2 = 110$$

VISTO CHE $H > 0$ E $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} < 0$

ALLORA IL PUNTO $(q_1; q_2) = (149; 51)$ È UN MASSIMO PER $\Pi$ E DI CONSEGUENZA LA COMBINAZIONE PRODUTTIVA CHE MASSIMIZZA IL PROFITTO È $q_1 = 149$ E $q_2 = 51$ CON UN PROFITTO PARI A:

$$\Pi(149; 51) = -2,7(149)^2 - 0,4 \cdot 149 \cdot 51 - 10,2(51)^2 + 825 \cdot 149 + 1100 \cdot 51 - 1000 = 88512,5$$

E VENDENDO IL PRODOTTO AI PREZZI

$P_1 = 835 - 2,5 \cdot 149 = 462,5$ NEL MERCATO INTERNO

$P_2 = 1110 - 10 \cdot 51 = 600$ NEL MERCATO ESTERO

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

**b** $P_1 = P_2$ (NON DISCRIMINANDO IL PREZZO)

IN QUESTO CASO LA DOMANDA COMPLESSIVA È

$$q = q_1 + q_2 = 334 - 0{,}4P + 111 - 0{,}1P = 445 - 0{,}5P$$

DALLA QUALE

$$0{,}5P = 445 - q \Rightarrow P = 890 - 2q$$

MENTRE LA FUNZIONE DEL PROFITTO È

$$\Pi = R - C = Pq - 1000 - 10q - 0{,}2q^2$$

CIOÈ

$$\Pi = q(890 - 2q) - 1000 - 10q - 0{,}2q^2 = 890q - 2q^2 - 1000 - 10q - 0{,}2q^2$$

$$\Pi = -2{,}2q^2 + 880q - 1000$$

FUNZIONE IN UNA VARIABILE LA CUI DERIVATA PRIMA È

$$\frac{\delta \Pi}{\delta q} = -4{,}4q + 880$$

CHE SI ANNULLA PER

$$-4{,}4q + 880 = 0 \Rightarrow q = \frac{880}{4{,}4} = 200$$

ED ESSENDO LA DERIVATA SECONDA NEGATIVA, CIOÈ

$$\frac{\delta^2 \Pi}{\delta q^2} = -4{,}4$$

ALLORA $\Pi(200) = -2{,}2(200)^2 + 880(200) - 1000 = 87000$

È IL MASSIMO PROFITTO CHE SI OTTIENE CON UNA QUANTITÀ DI BENE PARI A 200, UN UNICO PREZZO

$$P = 890 - 2q = 890 - 2 \cdot 200 = 490$$

E LE DIVERSE QUANTITÀ NEI DUE MERCATI PARI A

$$q_1 = 334 - 0{,}4 \cdot 490 = 138 \quad E \quad q_2 = 111 - 0{,}1 \cdot 490 = 62$$

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

## ESEMPI

**1** DETERMINARE PER QUALE COMBINAZIONE DI DUE BENI UN'IMPRESA OTTIENE IL MASSIMO PROFITTO VENDENDOLI IN UN MERCATO DI LIBERA CONCORRENZA SAPENDO CHE LA FUNZIONE DEI COSTI È

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + q_1 q_2 + 2q_2^2$$

E CHE IL PREZZO DEI BENI È $P_1 = €200$ E $P_2 = €150$.
DETERMINARE ANCHE IL MASSIMO PROFITTO.

INNANZI TUTTO SCRIVIAMO LA FUNZIONE DEL PROFITTO

$$\Pi = R - C = 200q_1 + 150q_2 - (3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2) =$$
$$= -3q_1^2 - 2q_2^2 - q_1q_2 + 200q_1 + 150q_2$$

CALCOLIAMO LE DUE DERIVATE PARZIALI E ANNULLIAMOLE

$$\Pi'_{q_1} = -6q_1 - q_2 + 200 \quad \text{E} \quad \Pi'_{q_2} = -4q_2 - q_1 + 150$$

$$\begin{cases} -6q_1 - q_2 + 200 = 0 \\ -4q_2 - q_1 + 150 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = -6q_1 + 200 \\ -4(-6q_1 + 200) - q_1 + 150 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2 = -6q_1 + 200 \\ 24q_1 - q_1 = 800 - 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = -6q_1 + 200 \\ 23q_1 = 650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = -6\frac{650}{23} + 200 \\ q_1 = \frac{650}{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{650}{23} \\ q_2 = \frac{-3900 + 4600}{23} \end{cases} \Rightarrow (q_1; q_2) = \left(\frac{650}{23}; \frac{700}{23}\right)$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE E L'HESSIANO

$$\Pi''_{q_1q_1} = -6 \qquad \Pi''_{q_1q_2} = \Pi''_{q_2q_1} = -1 \qquad \Pi''_{q_2q_2} = -4$$

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

$H=(-6)(-4)-(-1)^2=24-1=23>0$

COSÌ VISTO CHE $H>0$ E $\Pi''_{q_1q_1}<0$ ALLORA LA COMBINAZIONE DEI DUE BENI CHE RENDE UN MASSIMO PROFITTO È

$$q_1=\frac{650}{23}\simeq 28 \quad \text{E} \quad q_2=\frac{700}{23}\simeq 30$$

CON UN MASSIMO PROFITTO PARI A

$$\Pi=-3\cdot 28^2-2\cdot 30^2-28\cdot 30+200\cdot 28+150\cdot 30=€5108$$

**2** STRATEGIE A CONFRONTO –

PER PRODURRE DUE BENI UN'IMPRESA SOSTIENE DEI COSTI RAPPRESENTATI DALLA FUNZIONE

$$C=2q_1^2+2q_1q_2+q_2^2$$

DETERMINARE IL MASSIMO PROFITTO E CON QUALE COMBINAZIONE PRODUTTIVA LO OTTIENE SE

**a** **OPERA IN CONDIZIONI DI CONCORRENZA PERFETTA** CON PREZZI $P_1=€220$ E $P_2=€130$

**b** **OPERA IN CONDIZIONI DI MONOPOLIO CON LEGGI** DELLA DOMANDA $q_1=600-2P_1-P_2$ E $q_2=750-P_1-3P_2$

**a** LA FUNZIONE DEL PROFITTO È

$$\Pi=220q_1+130q_2-2q_1^2-2q_1q_2-q_2^2$$

LE DERIVATE PARZIALI SONO

$$\Pi'_{q_1}=220-4q_1-2q_2 \quad \text{E} \quad \Pi'_{q_2}=130-2q_1-2q_2$$

COSÌ

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

$$\begin{cases}220-4q_1-2q_2=0\\130-2q_1-2q_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4q_1+2q_2=220\\2q_1+2q_2=130\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q_1=55-\frac{1}{2}q_2\\q_1=65-q_2\end{cases}$$

$$q_1=q_1\Rightarrow 55-\frac{1}{2}q_2=65-q_2\Rightarrow q_2-\frac{1}{2}q_2=65-55$$

$$q_2=20\Rightarrow q_1=65-20=45$$

LE DERIVATE PARZIALI SECONDE SONO

$$\Pi''_{q_1q_1}=-4\qquad \Pi''_{q_1q_2}=\Pi''_{q_2q_1}=-2\qquad \Pi''_{q_2q_2}=-2$$

MENTRE L'HESSIANO È

$$H=(-4)(-2)-(-2)^2=8-4=4>0$$

QUINDI LA COMBINAZIONE CHE DÀ MASSIMO PROFITTO È $q_1=45$ E $q_2=20$ CON PROFITTO MASSIMO PARI A

$$\Pi=220\cdot45+130\cdot20-2\cdot45^2-2\cdot45\cdot20-20^2=€\,6250$$

**b** RICAVIAMO I PREZZI DALLE DOMANDE

$$\begin{cases}q_1=600-2P_1-P_2\\q_2=750-P_1-3P_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_2=600-2P_1-q_1\\P_1=750-q_2-3P_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_2=600-2P_1-q_1\\P_1=750-q_2-3(600-2P_1-q_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_2=600-2P_1-q_1\\P_1-6P_1=-1050-q_2+3q_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_2=600-2(210-0{,}6q_1+0{,}2q_2)-q_1\\P_1=210-0{,}6q_1+0{,}2q_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_1=210-0{,}6q_1+0{,}2q_2\\P_2=180+0{,}2q_1-0{,}4q_2\end{cases}$$

SCRIVIAMO LA FUNZIONE DEL PROFITTO

$$\Pi=P_1q_1+P_2q_2-2q_1^2-2q_1q_2-q_2^2=$$

$$=(210-0{,}6q_1+0{,}2q_2)q_1+(180+0{,}2q_1-0{,}4q_2)q_2-2q_1^2-2q_1q_2-q_2^2=$$

$$=210q_1-0{,}6q_1^2+0{,}2q_1q_2+180q_2+0{,}2q_1q_2-0{,}4q_2^2-2q_1^2-2q_1q_2-q_2^2$$

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

$$\Pi = 210q_1 - 2{,}6q_1^2 - 1{,}6q_1q_2 + 180q_2 - 1{,}4q_2^2$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI PRIME

$\Pi'_{q_1} = 210 - 5{,}2q_1 - 1{,}6q_2$ E $\Pi'_{q_2} = 180 - 2{,}8q_2 - 1{,}6q_1$

COSÌ

$$\begin{cases} 210 - 5{,}2q_1 - 1{,}6q_2 = 0 \\ 180 - 1{,}6q_1 - 2{,}8q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{210 - 1{,}6q_2}{5{,}2} \\ 1{,}6\left(\dfrac{210 - 1{,}6q_2}{5{,}2}\right) + 2{,}8q_2 = 180 \end{cases}$$

$$\frac{336}{5{,}2} - \frac{2{,}56}{5{,}2}q_2 + 2{,}8q_2 = 180 \Rightarrow \frac{14{,}56q_2 - 2{,}56q_2}{\cancel{5{,}2}} = \frac{936 - 336}{\cancel{5{,}2}}$$

$12q_2 = 600 \Rightarrow q_2 = 50$ E $q_1 = \dfrac{210 - 1{,}6 \cdot 50}{5{,}2} = 25$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE

$\Pi''_{q_1q_1} = -5{,}2 \qquad \Pi''_{q_1q_2} = \Pi''_{q_2q_1} = -1{,}6 \qquad \Pi''_{q_2q_2} = -2{,}8$

CALCOLIAMO L'HESSIANO

$$H = (-5{,}2)(-2{,}8) - (-1{,}6)^2 = 14{,}56 - 2{,}56 = 12 > 0$$

QUINDI LA COMBINAZIONE CHE DÀ MASSIMO PROFITTO È $q_1 = 25$ E $q_2 = 50$ CON PROFITTO MASSIMO PARI A

$$\Pi = 210 \cdot 25 + 180 \cdot 50 - 2{,}6 \cdot 25^2 - 1{,}6 \cdot 25 \cdot 50 - 1{,}4 \cdot 50^2 = €\,7125$$

CON PREZZI

$P_1 = 210 - 0{,}6 \cdot 25 + 0{,}2 \cdot 50 = €\,205 \qquad P_2 = 180 + 0{,}2 \cdot 25 - 0{,}4 \cdot 50 = €\,165$

**OSSERVAZIONE:**

SCEGLIENDO UN MECCANISMO DI MONOPOLIO L'IMPRESA PUÒ OTTENERE UN MAGGIORE PROFITTO DI

$$€\,7125 - €\,6250 = €\,875$$

**3** DETERMINARE PER QUALE COMBINAZIONE PRODUTTIVA UN'IMPRESA OTTIENE IL MASSIMO PROFITTO IN LIBERA CONCORRENZA SAPENDO CHE LA FUNZIONE DEI COSTI È

$$C = q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2$$

CON PREZZI PARI A $P_1 = €100$ E $P_2 = €250$.

$$\Pi = P_1q_1 + P_2q_2 - q_1^2 - 2q_1q_2 - 3q_2^2 = 100q_1 + 250q_2 - q_1^2 - 2q_1q_2 - 3q_2^2$$

$$\Pi'_{q_1} = 100 - 2q_1 - 2q_2 \quad e \quad \Pi'_{q_2} = 250 - 2q_1 - 6q_2$$

$$\begin{cases} 100 - 2q_1 - 2q_2 = 0 \\ 250 - 2q_1 - 6q_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2q_1 + 2q_2 = 100 \\ 2q_1 + 6q_2 = 250 \end{cases} \quad \begin{cases} 2q_1 + 2q_2 = 100 \\ 2q_2 - 6q_2 = 100 - 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + 2q_2 = 100 \\ -4q_2 = -150 \end{cases} \quad \begin{cases} 2q_1 + 2 \cdot 37{,}5 = 100 \\ q_2 = 37{,}5 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} q_1 = 12{,}5 \simeq 13 \\ q_2 = 37{,}5 \simeq 38 \end{cases}}$$

$$\Pi''_{q_1q_1} = -2 \qquad \Pi''_{q_1q_2} = \Pi''_{q_2q_1} = -2 \qquad \Pi''_{q_2q_2} = -6$$

$$H = (-2)(-6) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8 > 0 \quad e \quad \Pi''_{q_1q_1} < 0$$

$$(13;38) \text{ MASSIMO}$$

$$\Pi = 100 \cdot 13 + 250 \cdot 38 - 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 38 - 3 \cdot 38^2 = \boxed{€5311 \text{ MAX PROFITTO}}$$

**4** UN'IMPRESA PRODUCE DUE BENI E LI VENDE IN CONDIZIONI DI MONOPOLIO. LA FUNZIONE DEI COSTI È

$$C = q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2 + 500$$

MENTRE LE RELAZIONI DELLE DOMANDE SONO

$$q_1 = 500 - P_1 \qquad E \qquad q_2 = 1100 - 2P_2$$

# Massimo profitto di impresa (ESEMPI)

DETERMINARE LE QUANTITÀ DI CIASCUN PRODOTTO CHE MASSIMIZZANO IL PROFITTO CON I RELATIVI PREZZI.

$$q_1=500-p_1 \Rightarrow p_1=500-q_1 \qquad q_2=1100-2p_2 \Rightarrow p_2=550-\frac{1}{2}q_2$$

$$\Pi=(500-q_1)q_1+(550-\frac{1}{2}q_2)q_2-q_1^2-2q_1q_2-3q_2^2-500=$$

$$=500q_1-q_1^2+550q_2-\frac{1}{2}q_2^2-q_1^2-2q_1q_2-3q_2^2-500=$$

$$=-2q_1^2-2q_1q_2-\frac{7}{2}q_2^2+500q_1+550q_2-500$$

$$\Pi'_{q_1}=-4q_1-2q_2+500 \quad \text{E} \quad \Pi'_{q_2}=-2q_1-7q_2+550$$

$$\begin{cases}-4q_1-2q_2+500=0\\-2q_1-7q_2+550=0\end{cases} \begin{cases}4q_1+2q_2=500\\2q_1+7q_2=550\end{cases} \begin{cases}2q_1+q_2=250\\2q_1+7q_2=550\end{cases}$$

$$\begin{cases}2q_1+q_2=250\\7q_2-q_2=550-250\end{cases} \begin{cases}2q_1+q_2=250\\6q_2=300\end{cases} \begin{cases}2q_1+50=250\\q_2=50\end{cases} \begin{cases}q_1=100\\q_2=50\end{cases}$$

$$\Pi''_{q_1q_1}=-4 \qquad \Pi''_{q_1q_2}=\Pi''_{q_2q_1}=-2 \qquad \Pi''_{q_2q_2}=-7$$

$$H=(-4)(-7)-(-2)^2=28-4=24>0 \quad \Pi''_{q_1q_1}<0$$

$$(100;50) \text{ MAX}$$

MASSIMO PROFITTO

$$\Pi=-2(100)^2-2\cdot100\cdot50-\frac{7}{2}50^2+500\cdot100+550\cdot50-500=€\,38250$$

CON PREZZI DEI BENI PARI A:

$$p_1=500-q_1=500-100=€\,400$$

$$p_2=550-\frac{1}{2}q_2=550-25=€\,525$$