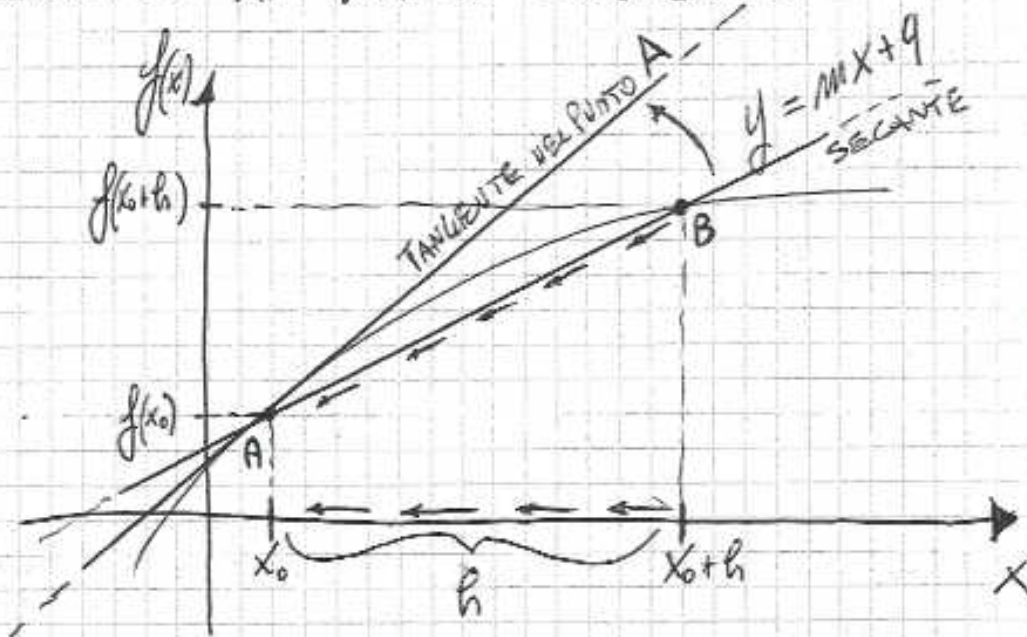


DERIVATA DI UNA FUNZIONE

DEFINIZIONE:

LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO x_0 , È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE NEL PUNTO x_0 .

CONSIDERANDO IL GRAFICO SEGUENTE:



LA RETTA È SECANTE LA FUNZIONE NEI PUNTI A e B:

$$A: [x_0; f(x_0)] \quad B: [(x_0 + h); f(x_0 + h)]$$

SE IPOTIZZIAMO CHE IL VALORE h DIVENTA SEMPRE PIÙ PICCOLO, CIOÈ $h \rightarrow 0$ (TENDE A 0--), IL PUNTO B SULLA FUNZIONE TENDERÀ A COINCIDERE CON IL PUNTO A, E LA RETTA DIVENTERÀ TANGENTE ALLA FUNZIONE NEL PUNTO A.

PROVIAMO A CALCOLARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DELLA RETTA $y = mx + q$ SECANTE LA FUNZIONE NEI PUNTI A e B:

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

RICHIAMIAMO LE COORDINATE DEI DUE PUNTI

$$A: [X_0; f(X_0)] = [X_A; y_A]$$

$$B: [X_0+h; f(X_0+h)] = [X_B; y_B]$$

SAPPIAMO CHE IN GENERALE IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DELLA RETTA GENERICA PASSANTE PER 2 PUNTI È:

$$m = \frac{y_B - y_A}{X_B - X_A}$$

NEL NOSTRO CASO:

$$m = \frac{f(X_0+h) - f(X_0)}{\cancel{X_0+h} - \cancel{X_0}} = \frac{f(X_0+h) - f(X_0)}{h}$$

CHE È IL RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE NEL PUNTO X_0 .

SE CALCOLIAMO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE PER $h \rightarrow 0$ OTTIENIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE NEL PUNTO X_0 , E CIOÈ LA DERIVATA DELLA FUNZIONE IN X_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0+h) - f(X_0)}{h} = f'(X_0)$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

ESEMPI DI CALCOLO CON L'USO DELLA DEFINIZIONE:

1) CALCOLARE LA DERIVATA DELLA FUNZIONE

$$f(x) = 2x$$

NEL PUNTO $x_0 = 2$

QUINDI:

$$f(x) = 2x$$

$$f(x_0) = 2(x_0) = 2(2) = 4$$

$$f(x_0+h) = 2(x_0+h) = 2(2+h) = 4 + 2h$$

QUINDI CALCOLANDO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE IN x_0 CON h CHE TENDE A 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{4+2h - 4}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

$$\text{CIOÈ } f'(x_0) = 2$$

2) $f(x) = 3x^2$ e $x_0 = 3$

$$f(x_0) = 3(x_0)^2 = 3(3)^2 = 3(9) = 27$$

14E $f(x_0+h) = 3(x_0+h)^2 = 3(3+h)^2 = 3(9+h^2+6h) = 27+3h^2+18h$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{27+3h^2+18h - 27}{h} = \frac{3h^2+18h}{h} = \frac{3h(h+6)}{h} \\ &= \frac{3(\cancel{h}+6)}{\cancel{h}} = 3 \cdot 6 = 18 \Rightarrow f'(x_0) = 18 \end{aligned}$$