

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

COME VISTO PER QUELLE DI 1° GRADO, IN QUESTE EQUAZIONI, OLTRE ALLA INCOGNITA (O ALLE ...) COMPaiono ALTRE LETTERE CHE NELLA RISOLUZIONE SI POSSONO CONSIDERARE COSTANTI, MA PER LE QUALI È NECESSARIA UNA DISCUSSIONE. SUPPONIAMO AD ESEMPIO CHE LA NOSTRA EQUAZIONE SIA NEL PARAMETRO k E CIÒ È:

$$\underbrace{(k+6)}_a x^2 + \underbrace{(k-2)}_b x + \underbrace{k+3}_c = 0$$

COME POSSIAMO VEDERE I SUOI COEFFICIENTI DIPENDONO DA k E PIÙ PRECISAMENTE

$$a = k+6 \quad b = k-2 \quad c = k+3$$

SE AD ESEMPIO k ASSUME IL VALORE -6 , CIÒ È SE $k = -6$, ALLORA

$$a = -6+6=0 \quad b = -6-2=-8 \quad c = -6+3=-3$$

IL COEFFICIENTE a DIVENTA NULLO E LA STESSA EQUAZIONE DI 2° GRADO PERDEREBBE DI SIGNIFICATO DIVENTANDO DI FATTO UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO.

SE INVECE $k=2$

$$a = 2+6=8 \quad b = 2-2=0 \quad c = 2+3=5$$

IL COEFFICIENTE b DIVENTA NULLO E L'EQUAZIONE DA COMPLETA DIVENTA PURA.

SE INVECE $k=-3$

$$a = -3+6=3 \quad b = -3-2=-5 \quad c = -3+3=0$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

IL COEFFICIENTE c SI ANNULLA E L'EQUAZIONE DIVENTA SPURIA.

SUPPONIAMO QUINDI DI VOLERLA RISOLVERE COME EQUAZIONE DI 2° GRADO.

LA PRIMA OSSERVAZIONE DA FARE SUL PARAMETRO k È CHE NON POTRÀ ESSERE PARI A -6 , PERCHÉ COME ABBIAMO VISTO SE IL COEFFICIENTE a È NULLO NON È UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO, QUINDI

$$k \neq -6$$

COSÌ SE CALCOLIAMO Δ (DELTA) CONSIDERANDO k COSTANTE OTTENIAMO:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{CIOÈ} \quad \Delta = (k-2)^2 - 4(k+6)(k+3)$$

$$\Delta = k^2 + 4 - 4k - 4(k^2 + 3k + 6k + 18)$$

$$\Delta = k^2 + 4 - 4k - 4k^2 - 12k - 24k - 72$$

$$\Delta = -3k^2 - 40k - 68$$

CIOÈ UNA NUOVA EQUAZIONE DI 2° GRADO NELLA QUALE k È L'INCOGNITA

A QUESTO PUNTO UNA ULTERIORE OSSERVAZIONE SU k CHE SI POTREBBE FARE AD ESEMPIO È QUELLA CHE SE $\Delta = 0$, COME SAPPIAMO, LA NOSTRA EQUAZIONE PARAMETRICA AVRÀ 2 SOLUZIONI COINCIDENTI, QUINDI RISOLVENDO

$$\Delta = 0 \Rightarrow -3k^2 - 40k - 68 = 0$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

POSSIAMO TROVARE I VALORI DI k PER I QUALI LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE SIANO COINCIDENTI (UGUALI) -

OPPURE SFRUTTANDO LE PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI TRA I COEFFICIENTI a, b, c POSSIAMO DETERMINARE IL VALORE DI k AFFINCHÉ LA SOMMA DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE PARAMETRICA SIA UGUALE AD UN DATO **NUMERO N** , PERCHÉ SAPENDO CHE SE ABBIAMO

$$ax^2 + bx + c = 0$$

CON

$$\Delta \geq 0$$

ALLORA

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{SOMMA DELLE SOLUZIONI}$$

QUINDI IMPONENDO I VALORI DI k AFFINCHÉ $\Delta \geq 0$, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE IN k

$$-\frac{b}{a} = \text{NUMERO } N$$

CHE NEL NOSTRO ESEMPIO SARÀ

$$-\frac{(k+6)}{k-2} = \text{NUMERO } N$$

IN CONCLUSIONE QUINDI, AL COSPETTO DI UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO PARAMETRICA, BISOGNA CONSIDERARE I SUOI COEFFICIENTI E LE LORO RELAZIONI FACENDO LE DOVUTE OSSERVAZIONI SUL (O SUI...) PARAMETRO/I IN ESSI CONTENUTI.

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

PARTENDO QUINDI DALLA FORMA NORMALE DI UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO

$$aX^2 + bX + c = 0$$

SE I COEFFICIENTI a, b, c DIPENDONO DA UNO O PIÙ PARAMETRI REALI LA RISOLUZIONE E LA DISCUSSIONE PREVEDONO DI RAGIONARE PER CASI SEGUENDO UN ORDINE PRECISO.

1 - SE IL COEFFICIENTE a DEL TERMINE DI 2° GRADO È PARAMETRICO SE NE STUDIA L'ANNULLAMENTO PERCHÉ SE $a=0$ L'EQUAZIONE DIVENTA DI 1° GRADO ED INDIVIDUIAMO QUINDI I VALORI PER CUI RISULTA $a \neq 0$

2 - CONSIDERIAMO L'ESPRESSIONE DI DELTA
 $\Delta = b^2 - 4ac$

CHE DIPENDERÀ DAL O DAI PARAMETRI SAPENDO CHE

- IL VALORE DEL O DEI PARAMETRI PER CUI RISULTA $\Delta \geq 0$ GARANTISCONO CHE L'EQUAZIONE AMMETTE 2 SOLUZIONI REALI (DISTINTE O COINCIDENTI).

- IL VALORE DEL O DEI PARAMETRI PER CUI RISULTA $\Delta < 0$ RENDONO L'EQUAZIONE IMPOSSIBILE PERCHÉ NON AMMETTE SOLUZIONI REALI.

COSÌ NELLA RISOLUZIONE DI EVENTUALI QUESITI PROPOSTI DETERMINATI I VALORI DEL O DEI PARAMETRI, SE PER QUESTI VALORI $\Delta < 0$, ALLORA TALI VALORI SARANNO **NON ACCETTABILI**.

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

TABELLA CONDIZIONI DI RISOLUZIONE

CONDIZIONE	SOLUZIONE
DETERMINARE QUANDO UNA RADICE È UGUALE A $\emptyset$ (ZERO)	SOSTITUIRE NELL'EQUAZIONE $x=0$
LA SOMMA DELLE RADICI È UGUALE AD UN NUMERO N	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = N$
IL PRODOTTO DELLE RADICI È UGUALE AD UN NUMERO N	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = N$
LE RADICI SONO OPPOSITE $x_1 = -x_2$	$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b=0$
LE RADICI SONO RECIPROCHE $x_1 = \frac{1}{x_2}$	$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c=a$
LE RADICI SONO ANTIRECIPROCHE $x_1 = -\frac{1}{x_2}$	$x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow c=-a$
LE RADICI SONO CONCORDI	$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow c > a$
LE RADICI SONO DISCORDI	$x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < a$
LE RADICI SONO COINCIDENTI $x_1 = x_2$	$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$
LE RADICI SONO REALI	$\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$
LE RADICI SONO REALI E DISTINTE	$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$
LE RADICI NON SONO REALI	$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

L'EQUAZIONE È PURA $ax^2 + c = 0$	$b = 0$
L'EQUAZIONE È SPURIA $ax^2 + bx = 0$	$c = 0$
LA SOMMA DEI RECIPROCI DELLE RADICI È UGUALE A UN NUMERO N	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = N \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = N$ $\Rightarrow -\frac{b}{c} = N$
LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE RADICI È UGUALE A UN NUMERO N	$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = N$ $\Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = N$
LA SOMMA DEI QUADRATI DEI RECIPROCI DELLE RADICI È UGUALE AD N	$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = N$ $\Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = N \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2$
LA SOMMA DEI CUBI DELLE RADICI È UGUALE AD N	$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = N$ $\Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = N$
LA SOMMA DEI CUBI DEI RECIPROCI DELLE RADICI È UGUALE AD N	$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = N$ $\Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = N\left(\frac{c}{a}\right)^3$
UNA RADICE È MULTIPLA DELL'ALTRA SECONDO UN FATTORE N	$\begin{cases} x_1 = N \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI

1 DETERMINARE K AFFINCHÉ L'EQUAZIONE AMMETTA RADICI REALI E COINCIDENTI

$$x^2 - x + k = 0$$

SAPPIAMO CHE DEVE ESSERE

$$\Delta = 0$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

QUINDI ESSENDO $a=1$ $b=-1$ $c=k$
ALLORA

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1) \cdot (k) = 1 - 4k = 0$$

$$4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

2 DETERMINARE k AFFINCHÉ L'EQUAZIONE
AMMETTA RADICI REALI E COINCIDENTI

$$(k+6)x^2 + (k-2)x + k+3 = 0$$

$$a = (k+6) \quad b = (k-2) \quad c = (k+3)$$

C.E. $a \neq 0 \Rightarrow k+6 \neq 0 \Rightarrow k \neq -6$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (k-2)^2 - 4(k+6)(k+3) = 0$$

$$k^2 + 4 - 4k + (-4k - 24)(k+3) = 0$$

$$k^2 + 4 - 4k + (-4k^2 - 12k - 24k - 72) = 0$$

$$k^2 + 4 - 4k - 4k^2 - 12k - 24k - 72 = 0$$

$$-3k^2 - 40k - 68 = 0$$

$$3k^2 + 40k + 68 = 0 \quad \text{EQ. 2° GRADO IN } k$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (40)^2 - 4(3)(68) =$$
$$= 1600 - 816 = 784$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 \pm \sqrt{784}}{6} =$$

$$= \frac{-40 \pm 28}{6} = \begin{cases} \frac{-40-28}{6} = -\frac{68}{6} \\ \frac{-40+28}{6} = -\frac{12}{6} \end{cases}$$

$$k_1 = -\frac{34}{3}$$

$$k_2 = -2$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

3 DATA LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$x^2 - x - k - 1 = 0$$

2) DETERMINARE k IN MODO CHE $x_1 = 2$

b) DETERMINARE L'ALTRA RADICE

2) SOSTITUIAMO $x=2$ NELL'EQUAZIONE

$$2^2 - 2 - k - 1 = 0 \Rightarrow 4 - 2 - 1 - k = 0$$

$$1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) CONSIDERIAMO $k=1$

$$x^2 - x - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$a=1 \quad b=-1 \quad c=-2$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{SAPENDO CHE } x_1 = 2$$

$$2 + x_2 = -\frac{-1}{1} \Rightarrow 2 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$$

4 DATA LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$(k+2)x^2 - 2(k-3)x + k^2 - 1 = 0$$

C.E.
 $x+2 \neq 0$
 $x \neq -2$

2) DETERMINARE k IN MODO CHE $x_1 = 0$

b) DETERMINARE L'ALTRA RADICE

$$2) \quad (k+2) \cdot 0^2 - 2(k-3) \cdot 0 + k^2 - 1 = 0$$

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k_1 = -1 \quad k_2 = +1$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

b) CONSIDERIAMO PRIMA $k=-1$

$$(-1+2)x^2 - 2(-1-3)x + \cancel{(-1)^2} - \cancel{1} = 0$$

$$x^2 + 8x = 0 \quad a=1 \quad b=8$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -8$$

E POI $k=+1$

$$(1+2)x^2 - 2(1-3)x + \cancel{(1)^2} - \cancel{1} = 0$$

$$3x^2 + 4x = 0 \quad a=3 \quad b=4$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3}$$

5 DETERMINARE I VALORI DI k PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI RECIPROCHE

$$(k+1)x^2 - 5x + 2k = 0$$

$$a=k+1 \quad b=-5 \quad c=2k$$

$$\text{C.E. } a \neq 0 \Rightarrow k+1 \neq 0 \Rightarrow k \neq -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(k+1)2k =$$

$$= 25 - 8k^2 - 8k = -8k^2 - 8k + 25$$

RADICI RECIPROCHE

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$$

CIOÈ

$$2k = k+1 \Rightarrow 2k-k=1 \Rightarrow k=1 \quad \text{ACCETTABILE PERCHÈ } \Delta(1) > 0$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

INFATTI

$$\Delta = -8k^2 - 8k + 25 = -8(1)^2 - 8(1) + 25 = \\ = -8 - 8 + 25 = -16 + 25 = +9 > 0$$

6 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI RECIPROCHE

$$(k+3)x^2 - (4k-1)x + 3(k-1) = 0$$

$$a = k+3 \quad b = 1-4k \quad c = 3k-3$$

C.E. $a \neq 0 \Rightarrow k+3 \neq 0 \Rightarrow k \neq -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1-4k)^2 - 4(k+3)(3k-3) = \\ = 16k^2 - 8k + 1 - 12k^2 + 12k - 36k + 36 = \\ = 4k^2 - 32k + 37$$

RADICI RECIPROCHE

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$$

$$3k-3 = k+3 \Rightarrow 3k-k = 3+3 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{2}$$

$k = 3$ NON ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(3) < 0$

INFATTI

$$\Delta = 4k^2 - 32k + 37 = 4(3)^2 - 32(3) + 37 = \\ = 36 - 96 + 37 = -60 + 37 = -23 < 0$$

7 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI RECIPROCHE

$$3x^2 - 2(k+1)x + k+1 = 0$$

$$a = 3 \quad b = -2k-2 \quad c = k+1$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (-2k-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (k+1) = \\ &= 4k^2 + 8k + 4 - 12k - 12 = \\ &= 4k^2 - 4k - 8 = k^2 - k - 8\end{aligned}$$

RADICI RECIPROCHE

$$C=a \Rightarrow k+1=3 \Rightarrow k=2 \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } \Delta(2) \geq 0$$

INFATTI

$$\begin{aligned}\Delta &= 4k^2 - 4k - 8 = 4(2)^2 - 4(2) - 8 = \\ &= 16 - 8 - 8 = 0\end{aligned}$$

8 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE RADICI OPPOSITE

$$2x^2 - (k+1)x + k = 0$$

$$a=2 \quad b=-(k+1) \quad c=k$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = [-(k+1)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = \\ &= k^2 + 2k + 1 - 8k = k^2 - 6k + 1\end{aligned}$$

RADICI OPPOSITE

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$-(k+1) = 0 \Rightarrow -k-1=0$$

$$k = -1 \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } \Delta(-1) > 0$$

INFATTI

$$\Delta = k^2 - 6k + 1 = (-1)^2 - 6(-1) + 1 = 1 + 6 + 1 = 8 > 0$$

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

9 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE RADICI OPPOSTE

$$(k-2)x^2 + 2(k-6)x - 4k - 1 = 0$$

$$a = k-2 \quad b = 2(k-6) \quad c = -4k-1$$

C.E. $a \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = [2(k-6)]^2 - 4(k-2)(-4k-1) = \\ &= 4(k^2 - 12k + 36) - 4(-4k^2 - k + 8k + 2) = \\ &= 4k^2 - 48k + 144 + 16k^2 - 28k - 8 = \\ &= 20k^2 - 76k + 136 = 5k^2 - 19k + 34 \end{aligned}$$

RADICI OPPOSTE

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$2(k-6) = 0 \Rightarrow 2k - 12 = 0$$

$$2k = 12 \Rightarrow k = \frac{12}{2} \Rightarrow k = 6 \text{ ACCETTABILE PERCHÉ } \Delta(6) > 0$$

INFATTI

$$\begin{aligned} \Delta &= 5k^2 - 19k + 34 = 5(6)^2 - 19(6) + 34 = 5 \cdot 36 - 19 \cdot 6 + 34 = \\ &= 180 - 114 + 34 = 100 > 0 \end{aligned}$$

10 DETERMINARE I VALORI DI K CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI ASSEGNATE PER LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

a) LE RADICI SIANO REALI E COINCIDENTI

b) LE RADICI SIANO OPPOSTE

c) IL PRODOTTO DELLE RADICI SIA 1

d) LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE RADICI SIA 7

EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

a)

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$k^2 - 4 = 0$$

$$k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm\sqrt{4} \Rightarrow k = \pm 2$$

b)

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \quad \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } \Delta(0) < 0$$

$$\Delta = k^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4 < 0$$

c)

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$$

$$1 = 1 \quad \forall k \quad \text{PER CUI } \Delta \geq 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow k \leq -2 \vee k \geq 2$$

d) SOMMA DEI QUADRATI DELLE RADICI UGUALE A 7

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 7$$

$$(-k)^2 - 2 \cdot 1 = 7 \Rightarrow k^2 = +2 + 7$$

$$k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9} \Rightarrow k = \pm 3 \quad \text{ACCETTABILI}$$

INFATTI

$$\Delta(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$$

$$\Delta(+3) = (+3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$$