

DIVISIONE DI POLINOMI

SE CONSIDERIAMO LA DIVISIONE TRA DUE NUMERI

$$N : M$$

DOVE N È IL DIVIDENDO ED M È IL DIVISORE, SAPPIAMO CHE SE Q È IL QUOZIENTE ED R IL RESTO, ALLORA VALE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$$

CIOÈ:

$$N = M \times Q + R$$

SE CONSIDERIAMO QUINDI LA SITUAZIONE IN CUI SIA IL DIVIDENDO CHE IL DIVISORE SONO ENTRAMBI DEI POLINOMI, CIOÈ

DIVISIONE DI POLINOMI

$P(x)$ POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO n

$D(x)$ POLINOMIO DIVISORE DI GRADO m

ALLORA SE $n \geq m$, CIOÈ IL POLINOMIO DIVIDENDO HA GRADO MAGGIORE O AL MASSIMO UGUALE AL GRADO DEL POLINOMIO DIVISORE, EFFETTUARE LA DIVISIONE

$$P(x) : D(x)$$

SIGNIFICA DETERMINARE UN ALTRO POLINOMIO QUOZIENTE $Q(x)$ CON GRADO $n-m$ ED UN POLINOMIO RESTO $R(x)$ CON GRADO MINORE DI m O NULLO, PER I QUALI VALE SEMPRE LA RELAZIONE:

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

DIVIDENDO = DIVISORE $\times$ QUOZIENTE + RESTO

DIVISIONE DI POLINOMI

OSSERVAZIONE:

SE IL POLINOMIO RESTO È DI GRADO Nullo, CIOÈ $R(x)=0$, ALLORA SI DICE CHE IL DIVIDENDO $P(x)$ È DIVISIBILE PER IL DIVISORE $D(x)$ E LA DIVISIONE È ESATTA.

DETERMINIAMO I POLINOMI QUOZIENTE $Q(x)$ E RESTO $R(x)$ ATTRAVERSO ALCUNI

ESEMPI:

1) $(-7x^3 + 1 + x^5) : (-3 + x^2)$

PER PRIMA COSA SI ORDINANO I POLINOMI SECONDO LE POTENZE DECRESCENTI DELLA INCOGNITA:

$$(x^5 - 7x^3 + 1) : (x^2 - 3)$$

POI SI COMPLETANO I POLINOMI CON

DIVISIONE DI POLINOMI

GLI EVENTUALI TERMINI MANGANTI:

$$(x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 1) : (x^2 + 0x - 3)$$

SI DISPONGONO DIVIDENDO A SINISTRA
E DIVISORE A DESTRA, IN TABELLA

(COME PER LE DIVISIONI TRA NUMERI)

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^2 + 0x - 3 \\ \hline & x^3 \end{array}$$

PRIMO PASSO

SI DIVIDE IL PRIMO TERMINE DEL
DIVIDENDO x^5 PER IL PRIMO
TERMINE DEL DIVISORE x^2 E
SI SCRIVE IL RISULTATO IN
TABELLA IN BASSO A DESTRA

DIVISIONE DI POLINOMI

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 0X^4 - 7X^3 + 0X^2 + 0X + 1 & X^2 + 0X - 3 \\ -X^5 - 0X + 3X^3 & \end{array}$$

X^3 (circled in red with an arrow pointing to the dividend)

SECONDO PASSO

SI MOLTIPLICA IL MONOMIO TROVATO (X^3) PER CIASCUN TERMINE DEL POLINOMIO DIVISORE E OGNI VOLTA SI SCRIVE IL RISULTATO CAMBIATO DI SEGNO SOTTO I TERMINI DELLO STESSO SEGNO DEL POLINOMIO DIVIDENDO

$$\begin{array}{r|l} \cancel{X^5} + 0X^4 - 7X^3 + 0X^2 + 0X + 1 & X^2 + 0X - 3 \\ -\cancel{X^5} - 0X^4 + 3X^3 & X^3 \\ \hline // // -4X^3 + 0X^2 + 0X + 1 & \end{array}$$

DIVISIONE DI POLINOMI

PASSO 3

SI SOMMIAMO I TERMINI SIMILI
E SI RIPORTA IL RISULTATO
ELIMINANDO COSÌ IL TERMINE
DI GRADO MASSIMO, OTTENENDO
UN NUOVO POLINOMIO, E FIN QUANDO
IL GRADO DI QUESTO NUOVO POLINOMIO È
MAGGIORE O UGUALE A QUELLO DEL DIVISORE
SI RIPARTE SEMPRE DAL PASSO 1.

Così:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^5} + 0x^4 - 7x^3 - 0x^2 + 0x + 1 & x^2 + 0x - 3 \\ - \cancel{x^5} - 0x^4 + 3x^3 & \hline // & -4x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ // & + 4x^3 & -12x \\ // & \hline // & -12x + 1 \end{array}$$

$x^3 - 4x$
↓
QUOZIENTE

$-12x + 1$
↓
RESTO

DIVISIONE DI POLINOMI

SI È OTTENUTO UN POLINOMIO DI GRADO 1 INFERIORE AL GRADO DEL DIVISORE (2) E QUINDI IL PROCEDIMENTO SI CONCLUDE COSÌ:

$$Q(x) = x^3 - 4x$$

$$R(x) = -12x + 1$$

IN DEFINITIVA:

$$(x^5 - 7x^3 + 1) = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 4x) - 12x + 1$$

DIVIDENDO = DIVISORE $\times$ QUOZIENTE + RESTO

DIVISIONE DI POLINOMI

$$2) (y + 2y^4) : (3 + y^2 - y)$$

ORDINIAMO I POLINOMI

$$(2y^4 + y) : (y^2 - y + 3)$$

AGGIUNGIAMO GLI EVENTUALI TERMINI MANCANTI.

$$(2y^4 + 0y^3 + 0y^2 + y + 0) : (y^2 - y + 3)$$

SVOLGIAMO LA DIVISIONE IN TABELLA:

$$\begin{array}{r|l} 2y^4 + 0y^3 + 0y^2 + y + 0 & y^2 - y + 3 \\ \underline{2y^4 + 2y^3 - 6y^2 + 0 + 0} & 2y^2 + 2y - 4 \\ \hline // +2y^3 - 6y^2 + y + 0 & \\ \underline{-2y^3 + 2y^2 - 6y + 0} & \\ \hline -4y^2 - 5y + 0 & \\ \underline{+4y^2 - 4y + 12} & \\ \hline -9y + 12 & \end{array}$$

QUINDI:

$$(2y^4 + y) = (y^2 - y + 3) \cdot (2y^2 + 2y - 4) - 9y + 12$$

DIVISIONE DI POLINOMI

$$3) (x^2 - y^2) : (x - y)$$

CONSIDERIAMO COME VARIABILE LA LETTERA x ,
COSÌ

$$(x^2 + 0x - y^2) : (x - y)$$

CIOÈ:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x - y^2 & x - y \\ -x^2 + xy + 0 & x + y \\ \hline // + xy - y^2 & \\ -xy + y^2 & \\ \hline // & \end{array}$$

QUINDI:

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

$$4) x^4 : (x^2 + x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 - x^2 & x^2 - x \\ \hline -x^3 - x^2 + 0x + 0 & \\ -x^3 - x^2 + x & \\ \hline x & \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 - x$$
$$R(x) = x$$

DIVISIONE DI POLINOMI

TEOREMA DEL RESTO

QUESTO TEOREMA CI PERMETTE DI CALCOLARE IL RESTO DELLA DIVISIONE DI UN POLINOMIO QUALSIASI PER UN POLINOMIO DI 1° GRADO SENZA DOVER EFFETTUARE LA DIVISIONE. CONSIDERIAMO LA DIVISIONE DI UN POLINOMIO $P(x)$ PER UN POLINOMIO DI 1° GRADO DEL TIPO $(x - c)$

DOVE c È UN NUMERO. IL RESTO DI TALE DIVISIONE È IL VALORE DEL POLINOMIO CALCOLATO PROPRIO IN c .

DIVISIONE DI POLINOMI

cioè: $R(x) = P(c)$

DIMOSTRAZIONE:

CONSIDERIAMO:

- $P(x)$

DIVIDENDO

- $D(x) = (x - c)$

DIVISORE

- $Q(x)$

QUOZIENTE

- $R(x)$

RESTO

SAPPIAMO CHE:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$$

QUINDI:

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R(x)$$

VISTO CHE IL GRADO DEL RESTO DEVE ESSERE

DIVISIONE DI POLINOMI

MINORE DEL GRADO DEL DIVISORE, ALLORA

$$\text{GRADO DI } R(x) < 1$$

DI CONSEGUENZA IL RESTO $R(x)$ O HA GRADO 0 (ZERO) CIOÈ È UN NUMERO OPPURE È IL POLINOMIO NULLO, QUINDI NON DIPENDE DALLA VARIABILE x E LO POSSIAMO INDICARE SEMPLICEMENTE CON R , COSÌ

$$P(x) = (x-c) Q(x) + R$$

SOSTITUENDO $x=c$

$$P(c) = (\cancel{c-c}) \cdot Q(c) + R$$

CIOÈ

$$P(c) = 0 \cdot \cancel{Q(c)} + R$$

ED IN DEFINITIVA

$$\boxed{P(c) = R}$$

c.v.d.

ESTENSIONE:

NEL CASO IN CUI IL POLINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO NON È MONICO (CIOÈ UN

DIVISIONE DI POLINOMI

POLINOMIO IN CUI IL COEFFICIENTE DEL MONOMIO DI GRADO MASSIMO È 1)
OSSIA SI PRESENTA NELLA FORMA:

$$(ax - b)$$

IN QUESTO CASO BISOGNA ESPRIMERLO COME.

$$(ax - b) = a \left(x - \frac{b}{a} \right)$$

E PER CALCOLARE IL RESTO BISOGNA DETERMINARE IL VALORE DEL POLINOMIO DIVIDENDO IN

$$c = \frac{b}{a}$$

CIOÈ:

$$R(x) = P\left(\frac{b}{a}\right)$$

ESempi

1) DETERMINARE IL RESTO DELLA DIVISIONE

TRA $P(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$

$$D(x) = x + 1$$

RISCRIVERE IL DIVISORE NELLA FORMA

$$(x - c)$$

DIVISIONE DI POLINOMI

CIOÈ

$$D(x) = (x+1) = [x - (-1)]$$

COSÌ

$$C = -1$$

CALCOLIAMO QUINDI IL RESTO

$$R(x) = P(C) = P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1) + 1 = \\ = 1 - 2 + 1 + 1 = 1$$

$$R(x) = 1$$

DI CONSEGUENZA, SENZA EFFETTUARE LA DIVISIONE, POSSIAMO DIRE CHE

$R(x) \neq 0$ ALLORA $P(x)$ NON È DIVISIBILE PER $D(x)$
E LA DIVISIONE NON SARÀ ESATTA.

2) DETERMINIAMO IL RESTO DELLA DIVISIONE TRA

$$P(y) = 12y^3 + 23y^2 + 5y$$

$$D(y) = 4y + 1$$

INNANTI TUTTO OSSERVIAMO CHE IL

DIVISIONE DI POLINOMI

DIVISORE $D(x)$ È DI 1° GRADO MA NON MONICO, QUINDI LO RISCRIVIAMO COME

$$D(x) = 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

E LO PORTIAMO NELLA FORMA

$$(x - c)$$

CIOÈ

$$D(x) = 4\left(x + \frac{1}{4}\right) = 4\left[x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

QUINDI

$$c = -\frac{1}{4}$$

COSÌ

$$\begin{aligned} R(x) = P(c) &= P\left(-\frac{1}{4}\right) = 12\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 23\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{4}\right) = \\ &= -12 \cdot \frac{1}{64} + 23 \cdot \frac{1}{16} - \frac{5}{4} = \\ &= -\frac{3}{16} + \frac{23}{16} - \frac{5}{4} = \frac{-3 + 23 - 20}{16} = \frac{0}{16} = 0 \end{aligned}$$

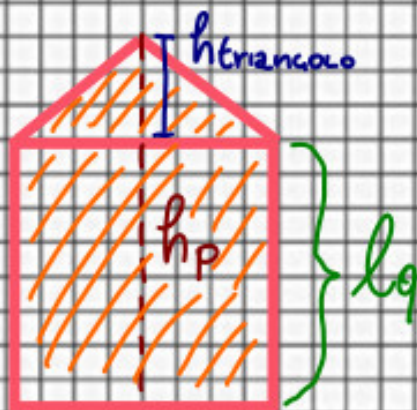
$R(x) = 0$ ALLORA $P(x)$ È DIVISIBILE PER $D(x)$
E LA DIVISIONE SARÀ ESATTA

DIVISIONE DI POLINOMI

VEDIAMO COME ULTIMO ESEMPIO LO SVOLGIMENTO DI UNA DIVISIONE TRA POLINOMI PER LA RISOLUZIONE DI UN **PROBLEMA**:

SUPPONIAMO DI AVERE UN PANNELLO FORMATO DA UN QUADRATO DI LATO $(5a+2)$ cm ED UN TRIANGOLO ISOSCELE AD ESSO SOVRAPPOSTO CON LA BASE PARI AL LATO DEL QUADRATO.

SE L'ALTEZZA DELL'INTERO PANNELLO MISURA 202 cm E L'AREA DEL PANNELLO È $(30a^2+32a+8)$ cm QUANTO MISURA a ?



$$A_p = \text{AREA PANNELLO} = (30a^2 + 32a + 8) \text{ cm}$$

$$l_q = \text{LATO QUADRATO} = (5a + 2) \text{ cm}$$

$$h_p = \text{ALTEZZA PANNELLO} = 202 \text{ cm}$$

$$a = ?$$

CALCOLIAMO INNANZI TUTTO L'AREA DEL QUADRATO

$$A_q = l^2 = (5a + 2)^2 = 25a^2 + 20a + 4$$

A QUESTO PUNTO FACENDO LA DIFFERENZA TRA L'AREA DEL PANNELLO A_p E L'AREA DEL QUADRATO A_q OTTENIAMO L'AREA DEL TRIANGOLO A_t :

$$\begin{aligned} A_t &= A_p - A_q = 30a^2 + 32a + 8 - (25a^2 + 20a + 4) = \\ &= 5a^2 + 12a + 4 \end{aligned}$$

SAPENDO CHE L'AREA DEL TRIANGOLO È UGUALE AL PRODOTTO

DIVISIONE DI POLINOMI

DELLA SUA BASE PER LA SUA ALTEZZA DIVISO 2, CIOÈ

$$A_t = \frac{b_t \times h_t}{2}$$

DA QUESTA EQUAGLIANZA CALCOLIAMO L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO h_t :

$$h_t = \frac{2 \times A_t}{b_t}$$

E VISTO CHE $b_t = l_q = 5a + 2$, ALLORA:

$$h_t = \frac{2 \times (5a^2 + 12a + 4)}{5a + 2}$$

CIOÈ

$$h_t = \frac{10a^2 + 24a + 8}{5a + 2}$$

OTTENENDO COSÌ LA DIVISIONE TRA 2 POLINOMI:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{10a^2} + 24a + 8 & 5a + 2 \\ - \cancel{10a^2} - 4a & 2a + 4 \\ \hline // + \cancel{20a} + 8 & \\ - \cancel{20a} - 8 & \\ \hline // // & \end{array}$$

QUINDI

$$h_t = 2a + 4$$

A QUESTO PUNTO SAPENDO CHE L'ALTEZZA DEL PANNELLO h_p MISURA 202 CM ED È LA SOMMA DELL'ALTEZZA DEL QUADRATO $h_q = l_q$ CON L'ALTEZZA

DIVISIONE DI POLINOMI

DEL TRIANGOLO h_t :

$$h_p = h_q + h_t$$

$$202 = (5a+2) + (2a+4)$$

OTTENIAMO UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO NELLA
INCOGNITA a , COSÌ

$$202 = 5a+2+2a+4$$

$$202 = 7a+6$$

$$196 = 7a$$

$$a = \frac{196}{7}$$

$$\boxed{a = 28} \text{ cm}$$