FRAZIONI ALGEBRICHE

UNA ESPRESSIONE ALGEBRICA CHE SI PRESENTA COME IL RAPPORTO TRA 2 POLINOMI PRENDE IL NOME DI FRAZIONE ALGEBRICA DETTA ANCHE FUNZIONE RAZIONALE.

SI DEFINISCE QUINDI FRAZIONE ALGEBRICA UNA QUALSIASI ESPRESSIONE DEL TIPO

$$\frac{N(\cdot)}{D(\cdot)}$$

DOVE $N(\cdot)$ E $D(\cdot)$ SONO 2 POLINOMI DOVE

$N(\cdot)$ NUMERATORE
$D(\cdot)$ DENOMINATORE

E LA FRAZIONE È DEFINITA SE E SOLO SE

$D(\cdot) \neq 0$ CONDIZIONE DI ESISTENZA

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

INDICHIAMO PER QUALI VALORI SONO DEFINITE LE SEGUENTI FRAZIONI:

$\boxed{1}$ $\frac{1}{x}$ CONDIZIONE DI ESISTENZA $x \neq 0$

QUINDI TALE FRAZIONE È DEFINITA

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0}$ PER OGNI X APPARTENENTE AD $\mathbb{R}$ TALE CHE X DIVERSA DA ZERO

FRAZIONI ALGEBRICHE

2) $\frac{2x}{x+1}$ CONDIZIONE DI ESISTENZA $x+1 \neq 0$

CIOÈ $x \neq -1$

QUINDI LA FRAZIONE È DEFINITA

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: x \neq -1}$

3) $\frac{x^2-4}{x^2-9x+8}$ C.E.:

$x^2-9x+8 \neq 0 \quad a=+1 \quad b=-9 \quad c=+8$

$\Delta = b^2-4ac = (-9)^2-4(1)(8) =$
$= 81-32 = 49$

$x_{1,2} \neq \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \neq \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2} \neq \frac{+9 \pm 7}{2} \neq \begin{cases} \frac{+9-7}{2} \neq \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \neq +1 \\ \frac{+9+7}{2} \neq \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} \neq +8 \end{cases}$

QUINDI:

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: x \neq 1 \vee x \neq 8}$

4) $\frac{6a}{a^2x-5ax+6x}$ C.E. $a^2x-5ax+6x \neq 0$

$x(a^2-5a+6) \neq 0$

$\boxed{x \neq 0}$

$a^2-5a+6 \neq 0$

$a_{1,2} \neq \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4(1)(6)}}{2} \neq \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$a_{1,2} \neq \frac{5 \pm 1}{2} \neq \begin{cases} \frac{5-1}{2} \neq \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} \boxed{\neq 2} \\ \frac{5+1}{2} \neq \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}} \boxed{\neq 3} \end{cases}$

QUINDI

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \vee \forall a \in \mathbb{R}: a \neq 2 \wedge a \neq 3}$

FRAZIONI ALGEBRICHE

ANNULLARE UNA FRAZIONE ALGEBRICA

UNA FRAZIONE ALGEBRICA SI DICE NULLA QUANDO IL SUO VALORE È ZERO, CIOÈ

$$\boxed{\frac{N(\cdot)}{D(\cdot)}=0}$$

MA COME PER LE FRAZIONI NUMERICHE QUESTO È VERO SE E SOLTANTO SE IL NUMERATORE È UGUALE A ZERO

$$\boxed{N(\cdot)=0}$$

PERCHÉ COME SAPPIAMO, PER ESSERE DEFINITA IL DENOMINATORE NON PUÒ MAI ESSERE UGUALE A ZERO

ESEMPI

DETERMINIAMO PER QUALI VALORI SI ANNULLANO LE SEGUENTI FRAZIONI:

1) $\frac{2x-4}{10x-12}$

C.E. $10x-12\neq 0$

$x\neq \frac{12}{10} \Rightarrow x\neq \frac{6}{5}$

INOLTRE

$$\frac{2x-4}{10x-12}=0 \overset{\text{SE E SOLO SE}}{\iff} 2x-4=0$$

$$x=\frac{4}{2}$$

$$\boxed{x=2}$$

2) $\frac{3a+3b-3c}{12}$

C.E. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\frac{3a+3b-3c}{12}=0 \iff 3a+3b-3c=0$$

$$\cancel{3}(a+b-c)=0$$

$$\boxed{a+b-c=0}$$

FRAZIONI ALGEBRICHE

3) $\frac{3x}{x^2+9x}$ C.E. $x^2+9x \neq 0$

$x(x+9) \neq 0$

$\boxed{x \neq 0}$ ✓ $\boxed{x \neq -9}$

$\frac{3x}{x^2+9x} = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$

$\boxed{x = 0}$ PER QUESTO VALORE LA FRAZIONE NON ESISTE E PER CIÓ NON É ACCETTABILE

QUINDI QUESTA FRAZIONE NON SI ANNULLA MAI.

SEMPLIFICARE UNA FRAZIONE ALGEBRICA

COME LE FRAZIONI NUMERICHE ANCHE QUELLE ALGEBRICHE SI POSSONO SEMPLIFICARE, ELIMINANDO I FATTORI COMUNI TRA NUMERATORE E DENOMINATORE. NATURALMENTE TRATTANDOSI DEL RAPPORTO TRA POLINOMI, PER SEMPLIFICARE UNA FRAZIONE ALGEBRICA BISOGNA RICORRERE PROPRIO ALLA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI.

ESEMPI

1) $\frac{3x}{9x^2} = \frac{\cancel{3}\cancel{x}}{\cancel{3}\cdot 3\cdot \cancel{x}\cdot x} = \frac{1}{3x}$

2) $\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{a}\cancel{b}}{{}_{5}\cancel{10}\, a^{\cancel{4}\,3}\, b^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4}{5ab^3}$

3) $\frac{7x}{14xy-21x} = \frac{\cancel{7x}}{\cancel{7x}(2y-3)} = \frac{1}{2y-3}$

FRAZIONI ALGEBRICHE

4) $\frac{5a^3-10a^2}{5a^3} = \frac{\cancel{5}\cancel{a^2}(a-2)}{\cancel{5}a^{\cancel{3}}} = \frac{a-2}{a}$

5) $\frac{a^2-4a+4}{3a^2-12} = \frac{(a-2)^2}{3(a^2-4)} = \frac{(a-2)^{\cancel{2}}}{3(a+2)\cancel{(a-2)}} = \frac{a-2}{3(a+2)}$

6) $\frac{6xy+3y^2}{8xy+4y^2} = \frac{3\cancel{y}\cancel{(2x+y)}}{4\cancel{y}\cancel{(2x+y)}} = \frac{3}{4}$

7) $\frac{x^2+2xy}{xy+2y^2} = \frac{x\cancel{(x+2y)}}{y\cancel{(x+2y)}} = \frac{x}{y}$

8) $\frac{a^2b^2+abx}{a^2b^2} = \frac{\cancel{ab}(ab+x)}{a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}} = \frac{ab+x}{ab}$

9) $\frac{bx+ax-by-ay}{by+ay+bx+ax} = \frac{x(b+a)-y(b+a)}{y(b+a)+x(b+a)} =$

$= \frac{\cancel{(b+a)}(x-y)}{\cancel{(b+a)}(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$

10) $\frac{6a^2-12a+6}{a^2-1} = \frac{6(a^2-2a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{6(a-1)^{\cancel{2}}}{(a+1)\cancel{(a-1)}} = \frac{6(a-1)}{a+1}$

12) $\frac{2x^2-8}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{N(x)}{D(x)}$

$N(x) = 2x^2-8 = 2(x^2-4) = 2(x+2)(x-2)$

$D(2) = (2)^3-(2)^2-4(2)+4 = \cancel{8}-\cancel{4}-\cancel{8}+\cancel{4} = 0$

2 È RADICE DEL POLINOMIO AL DENOMINATORE

QUINDI

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & -x^2 & -4x & +4 & x-2 \\
\cline{5-5}
-\cancel{x^3} & +2x^2 & & & x^2+x-2 \\
\hline
// & +\cancel{x^2} & -4x & +4 & \\
 & -\cancel{x^2} & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\cancel{2x} & +\cancel{4} & \\
 & & +\cancel{2x} & -\cancel{4} & \\
\cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

ANCORA

$$x^2+x-2=(1)^2+1-2=0$$

1 È RADICE DEL NUOVO POLINOMIO

COSÌ

$$
\begin{array}{r|rr|r}
 & +1 & +1 & -2 \\
+1 & & +1 & +2 \\
\hline
 & +1 & +2 & 0
\end{array}
$$

CIOÈ $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

ALLORA

$$D(x)=(x-2)(x-1)(x+2)$$

IN CONCLUSIONE

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{2\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)\cancel{(x+2)}}=\frac{2}{x-1}$$