

# FRAZIONI ALGEBRICHE

UNA ESPRESSIONE ALGEBRICA CHE SI PRESENTA COME IL RAPPORTO TRA 2 POLINOMI PRENDE IL NOME DI **FRAZIONE ALGEBRICA** DETTA ANCHE **FUNZIONE RAZIONALE**.

SI DEFINISCE QUINDI FRAZIONE ALGEBRICA UNA QUALSIASI ESPRESSIONE DEL TIPO

$$\frac{N(\cdot)}{D(\cdot)}$$

DOVE  $N(\cdot)$  E  $D(\cdot)$  SONO 2 POLINOMI DOVE

$N(\cdot)$  NUMERATORE

$D(\cdot)$  DENOMINATORE

E LA FRAZIONE È DEFINITA SE E SOLO SE

$D(\cdot) \neq 0$  **CONDIZIONE DI ESISTENZA**

## ESEMPI

INDICHIAMO PER QUALI VALORI SONO DEFINITE LE SEGUENTI FRAZIONI:

1

$$\frac{1}{x}$$

**CONDIZIONE DI ESISTENZA  $x \neq 0$**

QUINDI TALE FRAZIONE È DEFINITA

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0$$

**PER OGNI  $x$  APPARTENENTE AD  $\mathbb{R}$   
TALE CHE  $x$  DIVERSA DA ZERO**

# FRAZIONI ALGEBRICHE

2)  $\frac{2x}{x+1}$  CONDIZIONE DI ESISTENZA  $x+1 \neq 0$   
CIOÈ  $x \neq -1$

QUINDI LA FRAZIONE È DEFINITA

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq -1$$

3)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9x + 8}$  C.E.:  $x^2 - 9x + 8 \neq 0$   $a=1$   $b=-9$   $c=+8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(1)(8) = 81 - 32 = 49$$

$$x_{1,2} \neq \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \neq \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2} \neq \frac{+9 \pm 7}{2} \neq \begin{cases} \frac{+9-7}{2} \neq \frac{2}{2} \neq +1 \\ \frac{+9+7}{2} \neq \frac{16}{2} \neq +8 \end{cases}$$

QUINDI:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \vee x \neq 8$$

4)  $\frac{6a}{a^2x - 5ax + 6x}$  C.E.  $a^2x - 5ax + 6x \neq 0$   
 $x(a^2 - 5a + 6) \neq 0$

$$x \neq 0$$

$$a^2 - 5a + 6 \neq 0$$

$$a_{1,2} \neq \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} \neq \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$a_{1,2} \neq \frac{5 \pm 1}{2} \neq \begin{cases} \frac{5-1}{2} \neq \frac{4}{2} \neq 2 \\ \frac{5+1}{2} \neq \frac{6}{2} \neq 3 \end{cases}$$

QUINDI

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \vee \forall a \in \mathbb{R} : a \neq 2 \wedge a \neq 3$$

# FRAZIONI ALGEBRICHE

## ANNULLARE UNA FRAZIONE ALGEBRICA

UNA FRAZIONE ALGEBRICA SI DICE NULLA QUANDO IL SUO VALORE È ZERO, CIOÈ

$$\frac{N(\cdot)}{D(\cdot)} = 0$$

MA COME PER LE FRAZIONI NUMERICHE QUESTO È VERO **SE E SOLTANTO SE** IL NUMERATORE È UGUALE A ZERO

$$N(\cdot) = 0$$

PERCHÈ COME SAPPIAMO, PER ESSERE DEFINITA IL DENOMINATORE NON PUÒ MAI ESSERE UGUALE A ZERO

## ESEMPI

DETERMINIAMO PER QUALI VALORI SI ANNULLANO LE SEGUENTI FRAZIONI:

$$1) \frac{2x-4}{10x-12}$$

C.E.  $10x-12 \neq 0$   
 $x \neq \frac{12}{10} \Rightarrow x \neq \frac{6}{5}$

INOLTRE

$$\frac{2x-4}{10x-12} = 0 \quad \text{SE E SOLO SE} \quad \Leftrightarrow 2x-4=0$$
$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

$$2) \frac{3a+3b-3c}{12}$$

C.E.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\frac{3a+3b-3c}{12} = 0 \quad \Leftrightarrow 3a+3b-3c=0$$
$$3(a+b-c)=0$$

$$a+b-c=0$$

# FRAZIONI ALGEBRICHE

$$3) \frac{3x}{x^2+9x}$$

$$\text{CE. } x^2+9x \neq 0 \\ x(x+9) \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad \checkmark \quad x \neq -9$$

$$\frac{3x}{x^2+9x} = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$$

$$x = 0$$

PER QUESTO VALORE LA FRAZIONE  
NON ESISTE E PER CIÒ NON È ACCETTABILE

QUINDI QUESTA FRAZIONE NON SI ANNULLA MAI.

## SEMPLIFICARE UNA FRAZIONE ALGEBRICA

COME LE FRAZIONI NUMERICHE ANCHE QUELLE ALGEBRICHE SI POSSONO SEMPLIFICARE, ELIMINANDO I FATTORI COMUNI TRA NUMERATORE E DENOMINATORE. NATURALMENTE TRATTANDOSI DEL RAPPORTO TRA POLINOMI, PER SEMPLIFICARE UNA FRAZIONE ALGEBRICA BISOGNA RICORRERE PROPRIO ALLA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI.

### ESEMPI

$$1) \frac{3x}{9x^2} = \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot x \cdot x} = \frac{1}{3x}$$

$$2) \frac{8a^2b^4}{16a^4b^4} = \frac{4}{5ab^3}$$

$$3) \frac{7x}{14xy-21x} = \frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}x(2y-3)} = \frac{1}{2y-3}$$

# FRAZIONI ALGEBRICHE

$$4) \frac{5a^3 - 10a^2}{5a^3} = \frac{\cancel{5a^2}(a-2)}{\cancel{5a^3}} = \frac{a-2}{a}$$

$$5) \frac{a^2 - 4a + 4}{3a^2 - 12} = \frac{(a-2)^2}{3(a^2-4)} = \frac{(a-2)^2}{3(a+2)\cancel{(a-2)}} = \frac{a-2}{3(a+2)}$$

$$6) \frac{6xy + 3y^2}{8xy + 4y^2} = \frac{\cancel{3y}(2x+y)}{\cancel{4y}(2x+y)} = \frac{3}{4}$$

$$7) \frac{x^2 + 2xy}{xy + 2y^2} = \frac{x(\cancel{x+2y})}{y(\cancel{x+2y})} = \frac{x}{y}$$

$$8) \frac{a^2b^2 + abx}{a^2b^2} = \frac{\cancel{ab}(ab+x)}{\cancel{a^2b^2}} = \frac{ab+x}{ab}$$

$$9) \frac{bx + ax - by - ay}{by + ay + bx + ax} = \frac{x(b+a) - y(b+a)}{y(b+a) + x(b+a)} =$$
$$= \frac{\cancel{(b+a)}(x-y)}{\cancel{(b+a)}(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$10) \frac{6a^2 - 12a + 6}{a^2 - 1} = \frac{6(a^2 - 2a + 1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{6(a-1)^2}{\cancel{(a+1)}\cancel{(a-1)}} = \frac{6(a-1)}{a+1}$$

$$12) \frac{2x^2 - 8}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$$N(x) = 2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x+2)(x-2)$$

$$D(2) = (2)^3 - (2)^2 - 4(2) + 4 = \cancel{8} - \cancel{4} - \cancel{8} + \cancel{4} = 0$$

2 È RADICE DEL POLINOMIO AL DENOMINATORE

# FRAZIONI ALGEBRICHE

QUINDI

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - x^2 - 4x + 4 & x - 2 \\ -\cancel{x^3} + 2x^2 & \hline \hline // + \cancel{x^2} - 4x + 4 & x^2 + x - 2 \\ -\cancel{x^2} + 2x & \\ \hline -2x + 4 & \\ +2x - 4 & \\ \hline // // & \end{array}$$

ANCORA

$$x^2 + x - 2 = (1)^2 + 1 - 2 = 0$$

1 È RADICE DEL NUOVO POLINOMIO

COST

	+1	+1	-2
+1		+1	+2
	+1	+2	0

$$\text{CIOÈ } x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

ALLORA

$$D(x) = (x-2)(x-1)(x+2)$$

IN CONCLUSIONE

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2(\cancel{x+2})(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x-1)(\cancel{x+2})} = \frac{2}{x-1}$$