CALCOLO DERIVATE

UNA VOLTA ACQUISITA LA DEFINIZIONE DI DERIVATA VEDIAMO QUALI SONO LE PRINCIPALI REGOLE DI DERIVAZIONE PER POI PROCEDERE AL CALCOLO DELLE DERIVATE FONDAMENTALI (CIOÈ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI) INSERENDOLE IN UNA TABELLA IN MODO DA POTERLE UTILIZZARE POI NEI CALCOLI.

REGOLE DI DERIVAZIONE

1) LA DERIVATA DEL PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE È UGUALE AL PRODOTTO DELLA COSTANTE PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE

$$y = k \cdot f(x) \qquad y' = k \cdot f'(x)$$

2) LA DERIVATA DELLA SOMMA DI DUE O PIÙ FUNZIONI È UGUALE ALLA SOMMA DELLE DERIVATE DELLE DUE O PIÙ FUNZIONI

$$f(x) \pm g(x) \pm h(x) \qquad f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$$

3) LA DERIVATA DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI

$$f(x) \cdot g(x) \qquad f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4) LA DERIVATA DEL PRODOTTO DI TRE FUNZIONI

$$f \cdot g \cdot h \qquad f' \cdot g \cdot h + f \cdot h' \cdot g + f \cdot h \cdot g'$$

5) LA DERIVATA DEL RAPPORTO DI DUE FUNZIONI

$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

6) LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

$$f[g(x)] \qquad f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

7) DERIVATA DI FUNZIONE ELEVATA AD UNA FUNZIONE

$$f(x)^{g(x)} \qquad f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot \ln^{\blacktriangle}[f(x)]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

DERIVATE FONDAMENTALI

FUNZIONE	DERIVATA
$f(x)=\text{COSTANTE}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^m,\ m\in\mathbb{R}$	$f'(x)=m\cdot x^{m-1}$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot \ln^{\blacktriangle} a$

▲ LOGARITMO NATURALE

CALCOLO DERIVATE

FUNZIONE	DERIVATA
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ ▲
$f(x) = \ln x$ ▲	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$f'(x) = \frac{\lvert x \rvert}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

▲ LOGARITMO NATURALE

FUNZIONE	DERIVATA
$f(x)=\arctan x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arccot} x$	$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$f'(x)=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$f(x)=\cosh x$	$f'(x)=\sinh x$

NELLA TABELLA NON È VOLUTAMENTE INSERITA LA DERIVATA DELLA FUNZIONE RADICE IN QUANTO RIENTRA NEL CASO

$$f(x)=x^m \quad \text{CON } m\in\mathbb{R}$$

PERCHÉ CONSIDERANDO LA FUNZIONE

$$f(x)=\sqrt{x}$$

SECONDO LA DEFINIZIONE DI RADICALE SAPPIAMO CHE

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

COSÌ

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2x}$$

QUINDI SE

$$f(x)=\sqrt{x}$$

LA SUA DERIVATA È

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x}$$

MENTRE SE DOBBIAMO CALCOLARE LA DERIVATA DEL RECIPROCO DI UNA POTENZA, CIOÈ

$$f(x)=\frac{1}{x^n}$$

SECONDO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE BASTA RISCRIVERLA COME POTENZA AD ESPONENTE NEGATIVO, CIOÈ:

$$f(x)=x^{-n}$$

E SEGUENDO SEMPRE LA STESSA REGOLA LA SUA DERIVATA SARÀ:

$$f'(x)=-n\cdot x^{-n-1}$$

ESEMPI

1 $y=x^3$ $\qquad y'=3\cdot x^{3-1}=\boxed{3x^2}$

2 $y=\frac{1}{x}$

$y=x^{-1}$ $\qquad y'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=\boxed{-\frac{1}{x^2}}$

$\boxed{3}$ $y = 3x^2$

IN QUESTO CASO SI APPLICA LA REGOLA DELLA DERIVATA PER UNA COSTANTE CONSIDERANDO

$$Y = \underbrace{3}_{\text{COSTANTE } K} \cdot X^2 \to \text{FUNZIONE } f(x)$$

COSÌ

$$Y' = K \cdot f'(x)$$

QUINDI

$$Y' = \underbrace{3}_{K} \cdot \underbrace{2 \cdot X^{2-1}}_{\text{DERIVATA } f'(x)} = \boxed{6X}$$

$\boxed{4}$ $y = \dfrac{2}{x^2}$

$$y = 2 \cdot x^{-2} \qquad y' = 2 \cdot \left(-2 \cdot x^{-2-1}\right) = -4 \cdot x^{-3}$$

$$= \boxed{-\frac{4}{x^3}}$$

$\boxed{5}$ $y = \dfrac{2x+1}{x}$ $\to \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad y' = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

COSÌ

$$y' = \frac{2x - (2x+1)}{x^2} = \frac{\cancel{2x} - \cancel{2x} - 1}{x^2} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

CALCOLO DERIVATE

6

$$y=\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x$$

$$y'=\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}x^3+3x^2+\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x+1$$

$$y'=x^3+3x^2+3x+1$$

CHE PER I PRODOTTI NOTEVOLI POSSIAMO SCRIVERE COME IL CUBO DI UNA SOMMA, CIOÈ:

$$\boxed{y'=(x+1)^3}$$

7

$$y=\frac{x+2}{x-2}$$

$$y'=\frac{1\cdot(x-2)-(x+2)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}-2}{(x-2)^2}=\boxed{-\frac{4}{(x-2)^2}}$$

8

$$y=x^2-\frac{6x^2+7x-3}{2x+3}$$

$$y'=2x-\frac{(12x+7)(2x+3)-(6x^2+7x-3)\cdot 2}{(2x+3)^2}=$$

$$y'=2x-\frac{24x^2+36x+\cancel{14x}+21-12x^2-\cancel{14x}+6}{(2x+3)^2}=$$

$$y'=2x-\frac{12x^2+36x+27}{(2x+3)^2}=2x-\frac{3(4x^2+12x+9)}{(2x+3)^2}=$$

$$y'=2x-\frac{3\cdot\cancel{(2x+3)^2}}{\cancel{(2x+3)^2}}=\boxed{2x-3}$$

8 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA LA DERIVATA DI

$\sqrt{x}$ É $\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

ALLORA

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\cancel{2x}} \cdot \cancel{2x} - \sqrt{x}\cdot(2)}{4x^2} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{4x^2} = \boxed{-\frac{\sqrt{x}}{4x^2}}$$

9 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

CALCOLIAMO INNANZI TUTTO LA DERIVATA DEL DENOMINATORE, E PER QUESTA SFRUTTIAMO LA REGOLA DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA (N°6), CIOÉ:

$$f[g(x)] \Rightarrow f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

COSÍ:

$$\left(\sqrt{1+x}\right)' = \frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)} \cdot (1+x)' = \frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)} \cdot 1$$

QUINDI:

$$y' = \frac{1\cdot\sqrt{1+x} - x\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)}}{\left(\cancel{\sqrt{x+1}}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{2(1+x)\sqrt{1+x} - x\sqrt{1+x}}{2(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}\cdot(2+2x-x)}{2(1+x)^2} = \boxed{\frac{(2+x)\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2}}$$

$\boxed{10}$ $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$

ANCHE IN QUESTO CASO SFRUTTIAMO LA REGOLA DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA CIOÈ IL LOGARITMO DI UNA FRAZIONE, CIOÈ:

$$y' = \left[\ln \frac{1-x}{1+x}\right]' \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x) - 1\cdot(1-x)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1 \cancel{-x} - 1 \cancel{+x}}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{1+x}}{1-x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^{\cancel{2}}} = \boxed{-\frac{2}{1-x^2}}$$

$\boxed{11}$ $y = x \cdot \sqrt{4-x^2}$

SFRUTTIAMO LA REGOLA DELLA DERIVATA DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI (N°3):

$$y' = (x)' \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \left(\sqrt{4-x^2}\right)' =$$

PER LA DERIVATA DEL RADICALE SEMPRE QUELLA DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA (N°6):

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2(4-x^2)} \cdot (4-x^2)' = \frac{-\cancel{2}x\sqrt{4-x^2}}{\cancel{2}(4-x^2)} = -\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4-x^2}$$

QUINDI:

$$y' = 1\cdot\sqrt{4-x^2} + x\cdot\left(-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4-x^2}\right) =$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} = \frac{(4-x^2)\sqrt{4-x^2} - x^2\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} =$$

$$= \frac{(4-x^2-x^2)\cdot\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} = \frac{(4-2x^2)\sqrt{4-x^2}}{4-x^2}$$

$\boxed{12}$ $y = x - \sin x \cdot \cos x$

$$y' = 1 - \left[\cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)\right] =$$

$$= 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = \boxed{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}$$

$\boxed{13}$ $y = x(\ln x - 1)$

$$y = x\ln x - x$$

$$y' = 1\cdot\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - 1 = \cancel{1} - \cancel{1} + \ln x = \boxed{\ln x}$$

$\boxed{14}$ $y = \arctan\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$y' = \left[\arctan\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\right]' \cdot \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2} \cdot \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x + (\cos^2 x + \sin^2 x)^{\star}}{(1+\cos x)^2}$$

★ L'IDENTITÀ FONDAMENTALE DELLA TRIGONOMETRIA CI DICE CHE LA SOMMA DEI QUADRATI DEL SENO E DEL COSENO DI UNO STESSO ANGOLO È PARI AD 1

così:

$$y' = \frac{1}{\frac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}} \cdot \frac{\cancel{\cos x + 1}}{\cancel{(1+\cos x)^2}} =$$

$$= \frac{(1+\cos x)^{\cancel{2}}}{1+\cos^2 x+2\cos x+\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{1+\cos x}} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{1+2\cos x+(\cos^2 x+\sin^2 x)^{\star}} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{1+2\cos x+1} = \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} =$$

$$= \frac{\cancel{1+\cos x}}{2(\cancel{1+\cos x})} = \boxed{\frac{1}{2}}$$