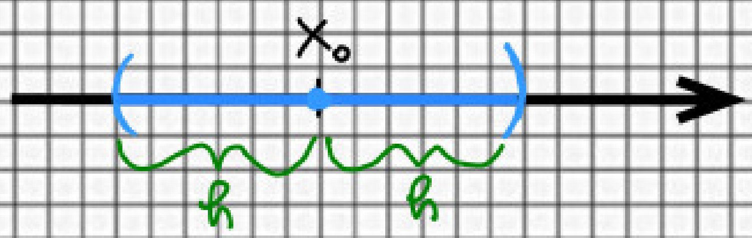
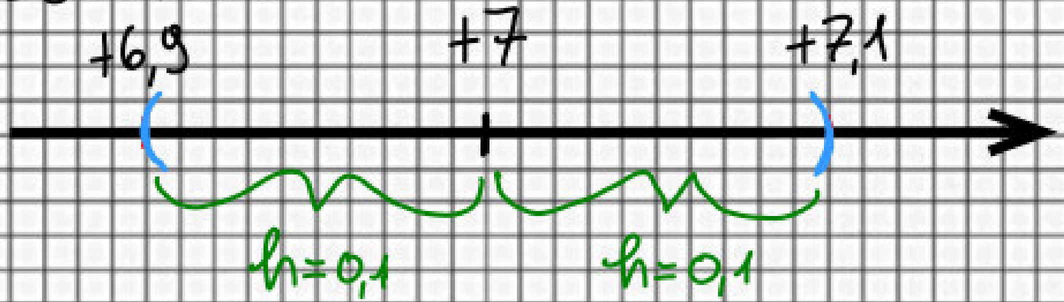
PRIMA DI COMINCIARE A DISCUTERE DEL SIGNIFICATO E DELLA DEFINIZIONE DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE È OPPORTUNO QUANTOMENO ACCENNARE IN MANIERA ANCHE VELOCE SENZA RIGOROSE DEFINIZIONI, AL CONCETTO DI INTORNO DI UN PUNTO IN UNA DIMENSIONE.
SE CONSIDERIAMO UN PUNTO $X_0 \in \mathbb{R}$ (UN QUALSIASI NUMERO REALE...) CHIAMIAMO INTORNO COMPLETO DEL PUNTO X_0 UN QUALSIASI INTERVALLO DI NUMERI IN ESSO CENTRATO, APERTO SIA A DESTRA CHE A SINISTRA DI AMPIEZZA ARBITRARIA.
IN GENERALE, GRAFICAMENTE



DOVE h È GEOMETRICAMENTE DETTO RAGGIO DELL'INTORNO COMPLETO, COSÌ $2h$ È DETTO DIAMETRO, MENTRE X_0 È DETTO CENTRO.
NATURALMENTE ESSENDO IN AMBITO DI ANALISI INFINITESIMALE LA MISURA DEL RAGGIO h È GENERALMENTE UNA MISURA MOLTO PICCOLA COME AD ESEMPIO:

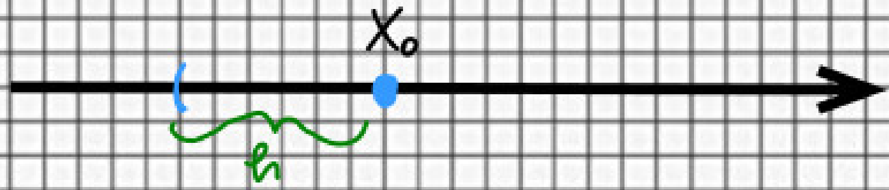


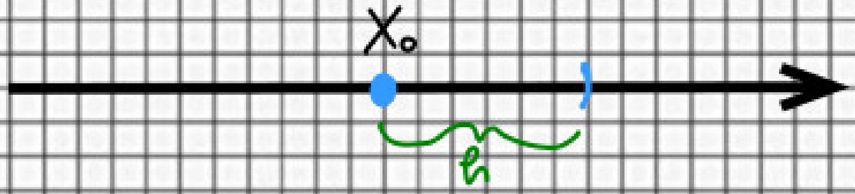
COSÌ IN QUESTO CASO L'INTORNO DEL PUNTO $X_0=+7$ È L'INTERVALLO DI VALORI

$$(+6{,}9 , +7{,}1) \in \mathbb{R}$$

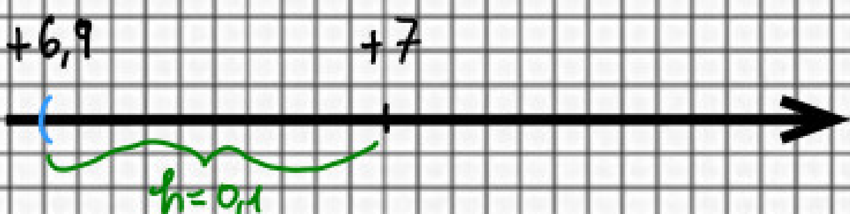
DOVE GLI ESTREMI +6,9 E +7,1 NON APPARTENGONO ALL'INTORNO, PERCHÉ È UN INTERVALLO APERTO (CIOÈ ESTREMI ESCLUSI).

SI PUÒ PARLARE ANCHE DI INTORNO SINISTRO O INTORNO DESTRO DEL PUNTO X_0 CONSIDERANDO L'INTERVALLO DI VALORI APERTO A SINISTRA O A DESTRA DI X_0, CIOÈ:

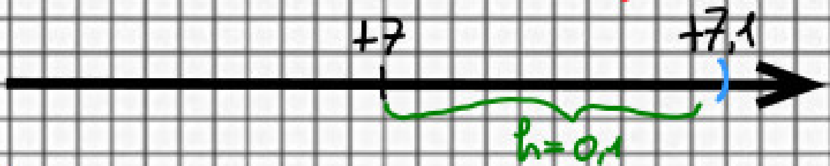




CONSIDERANDO SEMPRE L'ESEMPIO PRECEDENTE:



$(+6{,}9; +7] \in \mathbb{R}$ ESTREMO SINISTRO ESCLUSO (INTERVALLO APERTO A SINISTRA)



$[7; 7{,}1) \in \mathbb{R}$ ESTREMO DESTRO ESCLUSO (INTERVALLO APERTO A DESTRA)

DETTO QUINDI DEL CONCETTO DI INTORNO DI UN PUNTO POSSIAMO PASSARE A PARLARE DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE.

ANCHE IN QUESTO CASO CERCHIAMO DI DEFINIRE IL CONCETTO DI LIMITE DI UNA FUNZIONE SENZA ESPLICARE ALCUNA RIGOROSA DEFINIZIONE.

SOSTANZIALMENTE IL LIMITE DI UNA FUNZIONE È QUELL'OPERAZIONE CHE PERMETTE DI VERIFICARE CHE VALORI ASSUME UNA FUNZIONE NELL'INTORNO DI UN PUNTO DELLA SUA VARIABILE INDIPENDENTE, CIOÈ CHE RISULTATO FORNISCE LA FUNZIONE (VALORE DELLA Y VARIABILE DIPENDENTE...) MAN MANO CHE I VALORI DELLA VARIABILE INDIPENDENTE (X) SI AVVICINANO A QUEL PUNTO (VALORE...).

MA QUALI POSSONO ESSERE I PUNTI (VALORI) DELLA VARIABILE INDIPENDENTE (X) PER I QUALI IN UN LORO INTORNO È NECESSARIO VERIFICARE IN UN LORO INTORNO CHE VALORI ASSUME LA FUNZIONE (Y)?

SAPPIAMO CHE PER DEFINIZIONE IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE È L'INSIEME DEI VALORI CHE LA VARIABILE INDIPENDENTE PUÒ ASSUMERE.

CI CHIEDIAMO ALLORA CHE VALORE ASSUME LA FUNZIONE (Y) PER QUEI PUNTI (VALORI) CHE NON APPARTENGONO AL DOMINIO O PER GLI ESTREMI DEL DOMINIO SE INFINITI.

PER CHIARIRE IL CONCETTO BASTA FARE UN SEMPLICE

ESEMPIO, CONSIDERANDO LA FUNZIONE

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

SAPPIAMO CHE IL DOMINIO DI TALE FUNZIONE (ESSENDO UNA FRATTA...) È L'INSIEME DEI NUMERI REALI TRANNE QUELLI CHE RENDONO IL SUO DENOMINATORE UGUALE A Ø (ZERO), CIOÈ

$$\text{DOMINIO} = \mathbb{R} - \{x=0\}$$

IL CHE SIGNIFICA CHE L'INTERVALLO DI VALORI CHE RAPPRESENTA IL DOMINIO È:

$$(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$$

A QUESTO PUNTO CI CHIEDIAMO ALLORA CHE VALORI ASSUME LA FUNZIONE (Y) NEGLI ESTREMI DEL DOMINIO $+\infty$ E $-\infty$, E IN UN INTORNO DEL PUNTO $x=0$ (IN PARTICOLARE IN UN SUO INTORNO SINISTRO E IN UN SUO INTORNO DESTRO...).

ECCO SPIEGATO IL PERCHÉ DEL CONCETTO DI LIMITE DI UNA FUNZIONE, CHE IN GENERALE SI SCRIVE

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

E SI LEGGE LIMITE PER X CHE TENDE AD x_0, DI $f(x)$.

NELL'ESEMPIO CI SARÀ LA NECESSITÀ DI CALCOLARE 4 LIMITI:

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$

2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ → INTORNO SINISTRO DEL PUNTO $x=0$

3) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ → INTORNO DESTRO DEL PUNTO $x=0$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

CHE ANALITICAMENTE SIGNIFICA VERIFICARE CHE VALORE SI OTTIENE SOSTITUENDO NELLA FUNZIONE VALORI DELLA X CHE APPARTENGONO AD UN INTORNO DEL PUNTO AL QUALE LA STESSA X TENDE, CIOÈ:

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$

DIVIDENDO UNA QUANTITÀ COSTANTE (1) PER UNA QUANTITÀ CHE È SEMPRE PIÙ GRANDE IN NEGATIVO SI OTTIENE UNA QUANTITÀ PROSSIMA ALLO Ø DA SINISTRA (PER VALORI NEGATIVI).

INFATTI

$\frac{1}{-100} = -0{,}01 \quad \Big| \quad \frac{1}{-1000} = -0{,}001 \quad \Big| \quad \frac{1}{-10000} = -0{,}0001 \longrightarrow 0^-$

2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

DIVIDENDO UNA QUANTITÀ COSTANTE (1) PER UNA QUANTITÀ

CHE È SEMPRE PIÙ PICCOLA IN NEGATIVO SI OTTIENE UNA QUANTITÀ SEMPRE PIÙ GRANDE IN NEGATIVO.

INFATTI

$$\frac{1}{-0{,}01}=-100 \quad \Big| \quad \frac{1}{-0{,}001}=-1000 \quad \Big| \quad \frac{1}{-0{,}0001}=-10'000 \longrightarrow -\infty$$

3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

FORME INDETERMINATE

NATURALMENTE NELLO SVOLGERE CALCOLI DI OPERAZIONI CHE COINVOLGONO INFINITI ED INFINITESIMI (CIOÈ ANALISI INFINITESIMALE...). SI PUÒ GIUNGERE A DEI RISULTATI INDETERMINABILI CIOÈ CHE NON È POSSIBILE DETERMINARE A PRIORI.

TALI RISULTATI PRENDONO IL NOME DI FORME INDETERMINATE E SONO:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0\cdot\infty] \quad [1^{\infty}] \quad [\infty-\infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

PER RISOLVERE LE FORME INDETERMINATE PURTROPPO NON ESISTE UN METODO DIRETTO A SECONDA DELLA FORMA, MA UNA SERIE DI POSSIBILI STRATEGIE TRA LE QUALI SCEGLIERE PER PROCEDERE AL CALCOLO.

LA MAGGIOR PARTE DELLE FORME INDETERMINATE PUÒ ESSERE RISOLTA MEDIANTE:

- **LIMITI NOTEVOLI**: MEDIANTE I RISULTATI CONTENUTI NELLA TABELLA DEI LIMITI NOTEVOLI (CHE SI TROVA OVUNQUE GIROVAGANDO SUL WEB..) SI CERCA DI RISOLVERE IL NOSTRO LIMITE CONDUCENDOLO, MEDIANTE TRASFORMAZIONI E/O SEMPLIFICAZIONI, AD UNA FORMA NOTEVOLE_
- **TEOREMA DEL CONFRONTO** DEL QUALE CI OCCUPEREMO IN APPENDICE DI QUESTA SEZIONE_
- **TEOREMA DI DE L'HOPITAL**, NECESSARIA LA CONOSCENZA DELLE DERIVATE DELLE QUALI CI OCCUPIAMO PIÙ AVANTI_
- **SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR** PER IL QUALE È NECESSARIA UNA CONOSCENZA MOLTO APPROFONDITA DELLE SERIE NUMERICHE E DELLE QUALI NON CI OCCUPIAMO IN QUESTA SEZIONE_
- **SCOMPOSIZIONI, SEMPLIFICAZIONI, RAZIONALIZZAZIONI E SCRITTURE ALGEBRICHE EQUIVALENTI**_

ESEMPI CALCOLO DI LIMITI

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to+\infty} x^6-2x^5+1=(+\infty)^6-2(+\infty)^5+1=$$

$$=+\infty-\infty$$ INDETERMINATA

RACCOGLIAMO LA X DI GRADO MASSIMO, COSÌ:

$$\lim_{x\to+\infty} x^6-2x^5+1=\lim_{x\to+\infty} x^6\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^6}\right)=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (+\infty)^6 \cdot \left(1 - \frac{2}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}\right) = (+\infty) \cdot (1 - 0 + 0) =$$

$$= (+\infty) \cdot 1 = \boxed{+\infty}$$

IN QUESTO CASO AVREMMO POTUTO RISOLVERLO MOLTO PIÚ VELOCEMENTE FACENDO RIFERIMENTO ALLA **TEORIA DEGLI INFINITI** LA QUALE CI DICE CHE SE $x \to \pm\infty$ E LA FUNZIONE È UN POLINOMIO, BASTA SOSTITUIRE $\pm\infty$ AL MONOMIO DI GRADO MAGGIORE TENENDO CONTO DEI SEGNI E TRASCURANDO TUTTI GLI ALTRI TERMINI, CIOÈ:

$$\lim_{x \to +\infty} x^6 - 2x^5 + 1 = (+\infty)^6 = \boxed{+\infty}$$

$\boxed{2}$ $$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x^2 - 1 = (-\infty)^3 + 3(-\infty)^2 - 1 =$$

$$= -\infty + \infty \quad \text{INDETERMINATA}$$

QUINDI

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x^2 - 1 = (-\infty)^3 = \boxed{-\infty}$$

$\boxed{3}$ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 5}{2x^2 + 1} = \frac{(+\infty)^2 + (+\infty) - 5}{2(+\infty)^2 + 1} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} =$$

$$= \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{INDETERMINATA}$$

ANCHE IN QUESTO CASO LA **TEORIA DEGLI INFINITI** CI AIUTA PERCHÉ CI DICE CHE NEL RAPPORTO TRA 2 POLINOMI BISOGNA CONSIDERARE

I MONOMI DI GRADO MASSIMO AL NUMERATORE ED AL DENOMINATORE È:

a) SE AL NUMERATORE SI HA IL GRADO MAGGIORE IL RISULTATO È $\pm\infty$ TENENDO CONTO DEI SEGNI

b) SE AL NUMERATORE ED AL DENOMINATORE SI HA LO STESSO GRADO IL RISULTATO È IL RAPPORTO TRA I COEFFICIENTI

c) SE AL DENOMINATORE SI HA IL GRADO MAGGIORE IL RISULTATO È $\emptyset$ (ZERO)

QUINDI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-5}{2x^2+1}$$

2 GRADO MASSIMO NUMERATORE

2 GRADO MASSIMO DENOMINATORE

I 2 MONOMI DI GRADO MASSIMO HANNO LO STESSO GRADO, QUINDI IL RISULTATO È IL RAPPORTO TRA I COEFFICIENTI, CIOÈ:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1x^2+x-5}{2x^2+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{4}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x^2-1}{4x^2+5} = \frac{(-\infty)^3-2(-\infty)^2-1}{4(-\infty)^2+5} =$$

$$= \frac{-\infty}{+\infty}$$ INDETERMINATA

QUINDI

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{3}-2x-1}{4x^{2}+5} \qquad 3>2$$

COSÌ

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x-1}{4x^2+5} = \frac{(-\infty)^3}{(-\infty)^2} = \boxed{-\infty}$$

$\boxed{5}$ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^{2}+5}{x^{3}-2x-1} = \frac{+\infty}{-\infty} \qquad \text{INDETERMINATA}$$

MA $2<3$ COSÌ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+5}{x^3-2x-1} = \boxed{0}$$

$\boxed{6}$ $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-3x} = \frac{9-21+12}{9-9} = \frac{0}{0} \qquad \text{INDETERMINATA}$$

IN QUESTO CASO SI PROCEDE CON LA SCOMPOSIZIONE DEL NUMERATORE E DEL DENOMINATORE, SI SEMPLIFICA E SI RICALCOLA IL LIMITE TENENDO CONTO DEI SEGNI.

QUINDI

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-4)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-4}{x} = \frac{3-4}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$\boxed{7}$ $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINATA

QUINDI

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$\boxed{8}$ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-x+1}\right)=\infty-\infty$$ INDETERMINATA

QUINDI

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-x+1}\right)\cdot\boxed{\frac{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-x+1}}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-x+1}}}$$ $\rightarrow$ MOLTIPLICHIAMO PER 1!

COSÌ SFRUTTANDO I PRODOTTI NOTEVOLI (SOMMA X DIFFERENZA!)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{(\sqrt{4x^2+1})^2}-\cancel{(\sqrt{4x^2-x+1})^2}}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+\cancel{1}-\cancel{4x^2}+x-\cancel{1}}{\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}+\sqrt{4x^2\left(1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+2\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{1-\frac{1}{+\infty}}+\sqrt{1-\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty^2}}\right)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0+0}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2(\sqrt{1}+\sqrt{1})}=\frac{1}{2(2\sqrt{1})}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

CALCOLO LIMITI MEDIANTE LIMITI NOTEVOLI

$\boxed{9}$ $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln x}{1-x^2}\right]=\frac{\ln 1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINATA

MA CONTROLLANDO LA TABELLA DEI LIMITI NOTEVOLI CE NE UNO PER LE FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE PER IL QUALE

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=1 \;\star$$

QUINDI:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln x}{1-x^2}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+1-1)}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{-(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\ln[1+(x-1)]}{(x-1)}\cdot\frac{1}{-(x+1)}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\left[-\frac{1}{x+1}\right]=$$

MA SE

$$x-1=t \quad \text{E} \quad \lim_{x\to 1}x-1=\lim_{x\to 1}t=0$$

ALLORA

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1^{\star}$$

MENTRE $\lim_{x\to 1}\left[-\frac{1}{x+1}\right]=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

COSÌ

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln x}{1-x^2}\right]=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{10}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}=\frac{\ln(1+0)}{1-1}=\frac{0}{0}$ INDETERMINATA

MA

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}\cdot\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{1-\cos x}\cdot\frac{x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

DOVE PER I LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad \text{E} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

COSÌ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{0}=\boxed{\infty}$$

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

LA DEFINIZIONE DI QUESTO TEOREMA CI DICE CHE
SE $f(x)$ E $g(x)$ SONO 2 FUNZIONI:

1- DERIVABILI IN UN INTORNO DEL PUNTO X_0

2- CON DERIVATE CONTINUE E $g'(x) \neq 0$ (DERIVATA DI $g(x)$)

SE IL LIMITE IN X_0 DEL LORO RAPPORTO SI PRESENTA NELLA FORMA INDETERMINATA

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

QUINDI PRATICAMENTE IL LIMITE IN X_0 DEL RAPPORTO DELLE FUNZIONI PUÒ ESSERE CALCOLATO COME LIMITE DEL RAPPORTO TRA LE DERIVATE DELLE FUNZIONI.

IL TEOREMA VALE ANCHE NEL CASO IN CUI $X \to \infty$ E IL LIMITE ASSUME LA FORMA INDETERMINATA

$$\frac{\infty}{\infty}$$

QUANDO OPPORTUNO PUÒ ESSERE REITERATO, CIOÈ CALCOLANDO LE DERIVATE DELLE FUNZIONI (DERIVATE PRIME..), POI NEL CASO LE DERIVATE DELLE DERIVATE (DERIVATE SECONDE..) E COSÌ VIA.

ESEMPI LIMITI CON DE L'HOPITAL

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ INDETERMINATA

CALCOLIAMO QUINDI LA DERIVATA DEL NUMERATORE E LA DERIVATA DEL DENOMINATORE:

$$N(x) = x^3 - 1 \implies N'(x) = 3x^2$$
$$D(x) = x^2 - 1 \implies D'(x) = 2x \implies \frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{2x}} = \frac{3x}{2}$$

COSÌ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$ INDETERMINATA

QUINDI:

$$(\sqrt{x}-2)' = (x^{\frac{1}{2}}-2)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$
$$(x-4)' = 1$$

COSÌ:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{2-\sqrt{x^2+3}} = \frac{\ln 1}{2-2} = \frac{0}{0}$ INDETERMINATA

MA:

$$[\ln(2-x)]' = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' = -\frac{1}{2-x}$$

$$\left(2-\sqrt{x^2+3}\right)' = \left[2-\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = -\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2+3\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\cdot\cancel{2}x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= -\frac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2+3}$$

COSÌ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{-}\frac{1}{2-x}}{\cancel{-}\frac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2+3}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2-x}\cdot\frac{x^2+3}{x\sqrt{x^2+3}} =$$

$$= \frac{1}{2-1}\cdot\frac{1+3}{1\cdot\sqrt{1+3}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} = \boxed{2}$$

$\boxed{4}$ $$\lim_{x\to 5}\frac{2\ln x-\ln 25}{x^2-25} = \frac{2\ln 5-\ln 25}{25-25} = \frac{\ln 5^2-\ln 25}{25-25} =$$

$$= \frac{0}{0} = \text{INDETERMINATA}$$

Così

$$\left(2\ln x-\ln 25\right)' = 2\cdot\frac{1}{x}-0 = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\frac{2}{x}}{2x} = \frac{\cancel{2}}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{2}x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^2-25\right)' = 2x-0 = 2x$$

QUINDI

$$\lim_{x\to 25}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{5^2} = \boxed{\frac{1}{25}}$$

5 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINATA

QUINDI:

$$(1-\cos x)'=\sin x \quad \text{E} \quad (x)'=1$$

Così:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\boxed{0}$$

6 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{e^x\cdot \ln x}=\frac{1-1}{e\cdot 0}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINATA

MA

$$(x^2-1)'=2x$$

$$(e^x\cdot \ln x)'=e^x\cdot \ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$$

Così:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{e^x\cdot \ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}=\frac{2\cdot 1}{e^1\left(\frac{1}{1}+\cancel{\ln 1}\right)}=\boxed{\frac{2}{e}}$$

7 $$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-5x-6}=\frac{2-2}{36-30-6}=\frac{0}{0}$$ INDETERMINATA

MA

$$\left(2-\sqrt{x-2}\right)'=\left[2-(x-2)^{\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x)'=-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$(x^2-5x-6)'=2x-5$$

Così:

$$\lim_{x\to 6}\frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-5x-6}=\lim_{x\to 6}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot\frac{1}{2x-5}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}=\boxed{-\frac{1}{28}}$$

$\boxed{8}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\infty)}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ INDETERMINATA

MA

$[\ln(1+x^2)]' = \frac{2x}{1+x^2}$ E $(x)' = 1$

COSÌ:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \boxed{0}$ PERCHÉ IL GRADO DEL DENOMINATORE È MAGGIORE DI QUELLO DEL NUMERATORE!

$\boxed{9}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$ INDETERMINATA

MA

$[x^3 - 2x]' = 3x^2 - 2$

$[\ln x]' = \frac{1}{x}$

COSÌ

$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 2) \cdot x = (+\infty) \cdot \infty = \boxed{+\infty}$

$\boxed{10}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x - x} = \frac{\infty}{\infty}$ INDETERMINATA

$[e^x]' = e^x$

$[\ln x - x]' = \frac{1}{x} - 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{+\infty}{0-1} = \boxed{-\infty}$

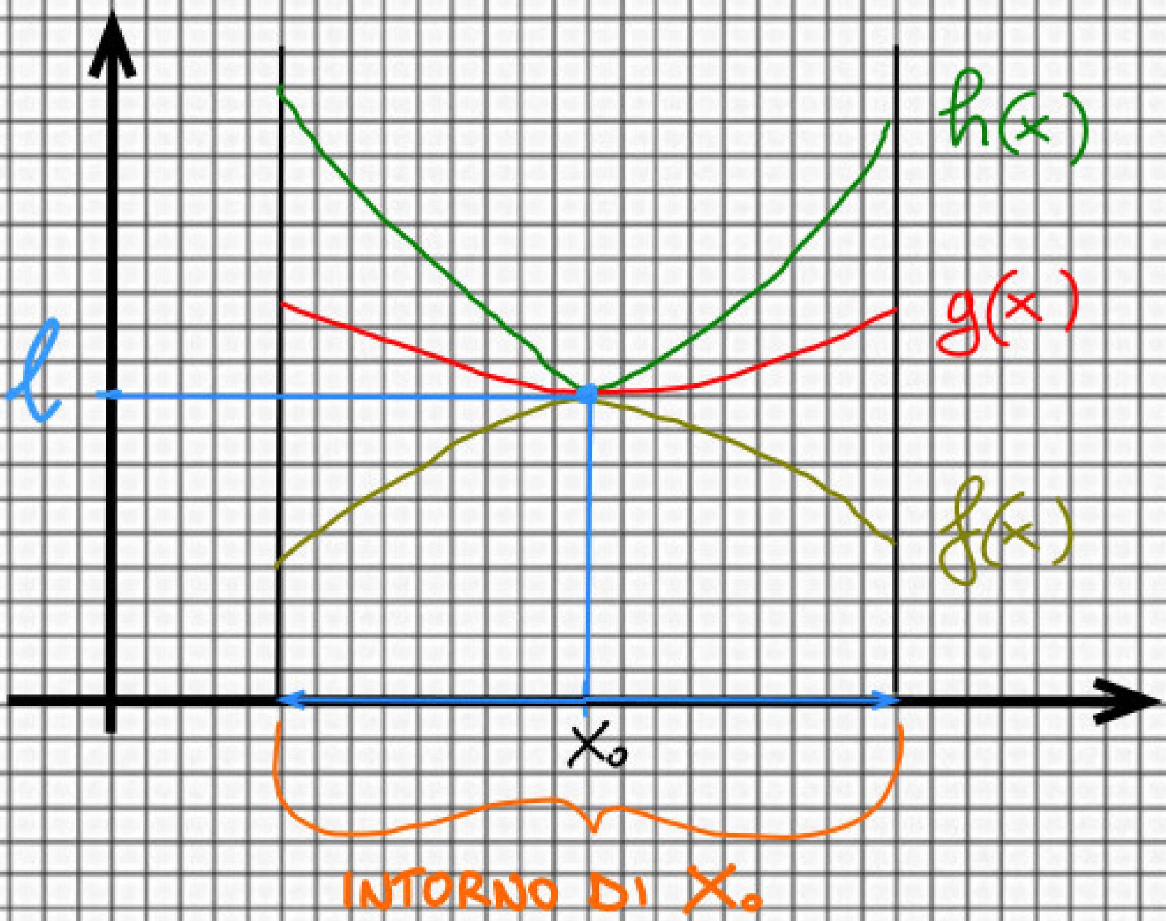
APPENDICE: TEOREMA DEL CONFRONTO

PER DEFINIZIONE QUESTO TEOREMA CI DICE CHE DATE 3 FUNZIONI $f(x)$, $g(x)$ E $h(x)$

1- SE ESISTE UN INTORNO DEL PUNTO x_0 DOVE $g(x)$ É COMPRESA TRA $f(x)$ ED $h(x)$ IN TUTTI I PUNTI DELL'INTORNO ESCLUSO AL MASSIMO x_0 STESSO

2- SE $f(x)$ ED $h(x)$ TENDONO IN x_0 ALLO STESSO LIMITE FINITO "ℓ"

ALLORA ANCHE $g(x)$ AVRĀ IN x_0 LIMITE UGUALE AD "ℓ".



VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}}$$

SAPENDO CHE

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$

ALLORA

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq +\frac{1}{x}$$

MA VISTO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} +\frac{1}{x} = 0$$

ALLORA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = \boxed{0}$$