TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

LA CIRCONFERENZA

SI DEFINISCE CIRCONFERENZA IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI P DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO C DETTO CENTRO:

$$\overline{PC} = r$$

TALE DISTANZA PRENDE IL NOME DI "RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA" E SI INDICA APPUNTO CON "r"

LA SUA EQUAZIONE CANONICA COMPLETA È:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

LE COORDINATE DEL CENTRO, CHE INDICHIAMO CON:

$$C(\alpha; \beta)$$

SONO:

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad E \quad \beta = -\frac{b}{2}$$

MENTRE LA RELAZIONE PER IL RAGGIO È:

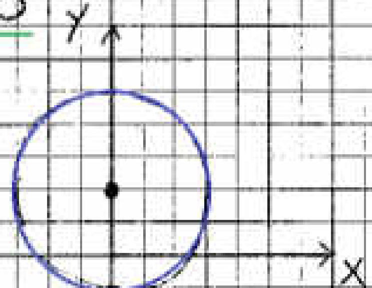
$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

ED AFFINCHÈ LA CIRCONFERENZA SIA REALE È NECESSARIO CHE:

$$\alpha^2 + \beta^2 - c \geq 0$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA NEL PIANO CARTESIANO

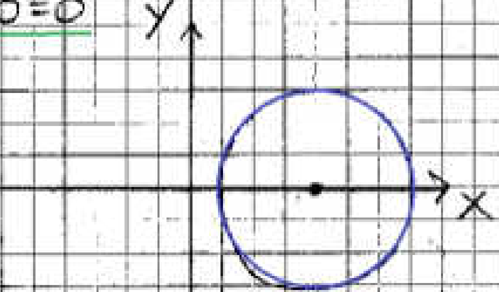
SE $a = 0$



CENTRO SULLE ORDINATE

$$x^2 + y^2 + by + c = 0$$

SE $b = 0$

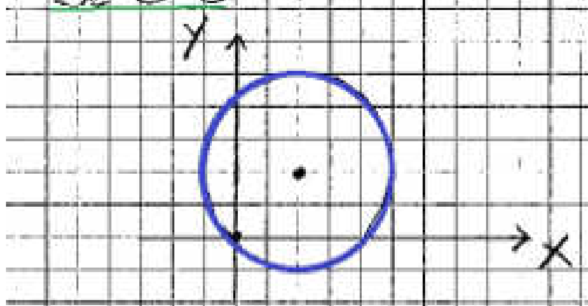


CENTRO SULLE ASCISSE

$$x^2 + y^2 + ax + c = 0$$

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

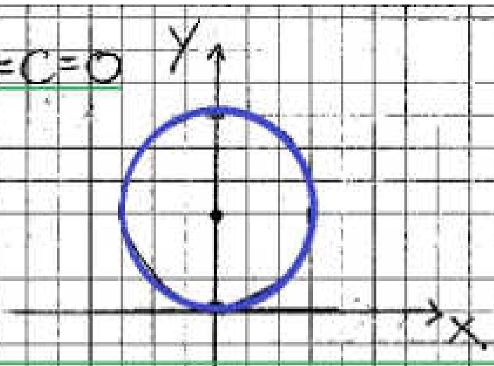
SE $c=0$



INTERSEZIONE NELL'ORIGINE

$$x^2+y^2+ax+by=0$$

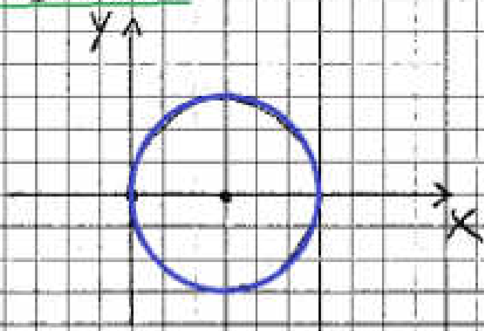
SE $a=c=0$



CENTRO SULLE ORDINATE ED INTERSEZIONE NELL'ORIGINE

$$x^2+y^2+by=0$$

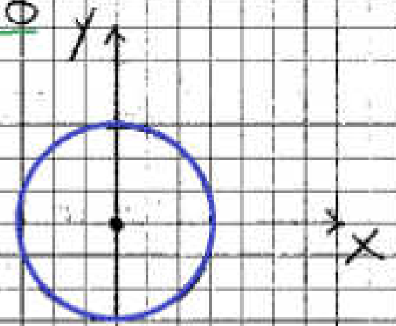
SE $b=c=0$



CENTRO SULLE ASCISSE ED INTERSEZIONE NELL'ORIGINE

$$x^2+y^2+ax=0$$

SE $a=b=0$



CENTRO NELL'ORIGINE

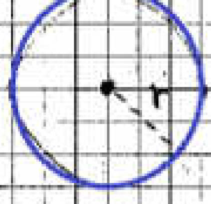
$$x^2+y^2+c=0$$

OPPURE

$$x^2+y^2=r^2$$

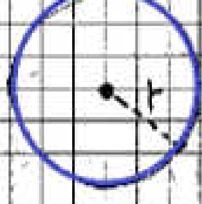
SE $a=b=c=0$ LA CIRCONFERENZA SI RIDUCE AL PUNTO $O(0,0)$ ORIGINE DEGLI ASSI.

LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA



$$l=2\pi r$$

AREA DEL CERCHIO DI RAGGIO r



$$A=\pi r^2$$

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

RICERCA DELL'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

A) EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA NOTO IL CENTRO E IL RAGGIO

NOTI IL CENTRO E IL RAGGIO

$$C(\alpha;\beta) \quad E \quad r$$

PARTENDO DALLA DEFINIZIONE CIOÈ LUOGO DEI PUNTI EQUIDISTANTI DAL CENTRO:

$$\overline{PC} = r$$

DOVE P È IL GENERICO PUNTO $P(x;y)$, COSÌ:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2}$$

SI SVILUPPANO I CALCOLI E SI OTTIENE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

B) EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER TRE PUNTI:

SUPPONENDO DI AVERE LE COORDINATE DI TRE PUNTI

$$A(x_A;y_A) \quad B(x_B;y_B) \quad C(x_C;y_C)$$

LE SOSTITUIAMO UNA ALLA VOLTA NELL'EQUAZIONE GENERICA DELLA CIRCONFERENZA:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

OTTENENDO UN SISTEMA DI TRE EQUAZIONI NELLE TRE INCOGNITE

$$a \qquad b \qquad c$$

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} X_A^2+Y_A^2+aX_A+bY_A+C=0 \\ X_B^2+Y_B^2+aX_B+bY_B+C=0 \\ X_C^2+Y_C^2+aX_C+bY_C+C=0 \end{cases}$$

RISOLVENDO IL SISTEMA SI OTTENGONO I VALORI DI a, b E C, CON I QUALI POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER I TRE PUNTI DATI:

$$\boxed{X^2+Y^2+aX+bY+C=0}$$

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTA E CIRCONFERENZA

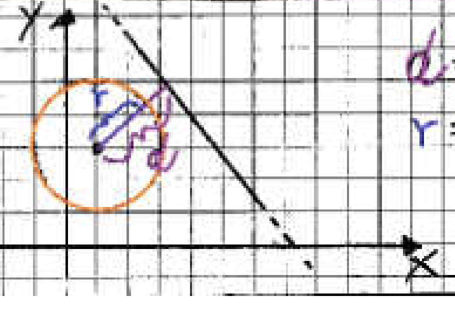
PER VERIFICARE LA POSIZIONE CHE UNA CIRCONFERENZA ED UNA RETTA POSSONO RECIPROCAMENTE AVERE NELLO STESSO PIANO, BASTA RISOLVERE IL SISTEMA DI SECONDO GRADO FORMATO DALLE LORO EQUAZIONI:

$$\boxed{\begin{cases} X^2+Y^2+aX+bY+C=0 \\ aX+bY+C=0 \end{cases}}$$

NELLA SUA RISOLUZIONE SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO IN CUI:

1) SE $\Delta < 0$ - NEGATIVO

DUE SOLUZIONI COMPLESSE E CONIUGATE, CIOÈ NESSUNA SOLUZIONE REALE E QUINDI NESSUN PUNTO IN COMUNE TRA LA RETTA E LA CIRCONFERENZA, COSÌ RETTA ESTERNA ALLA CIRCONFERENZA



d = DISTANZA DELLA RETTA DAL CENTRO

r = RAGGIO

$$\boxed{d > r}$$

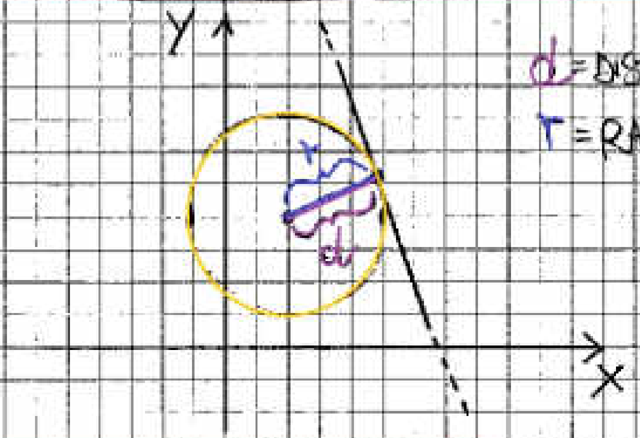
TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

②

2) SE $\Delta = 0$ - NULLO

DUE SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI E QUINDI LA RETTA E LA CIRCONFERENZA HANNO 1 PUNTO IN COMUNE, CIOÈ:

RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA



d = DISTANZA DELLA RETTA DAL CENTRO

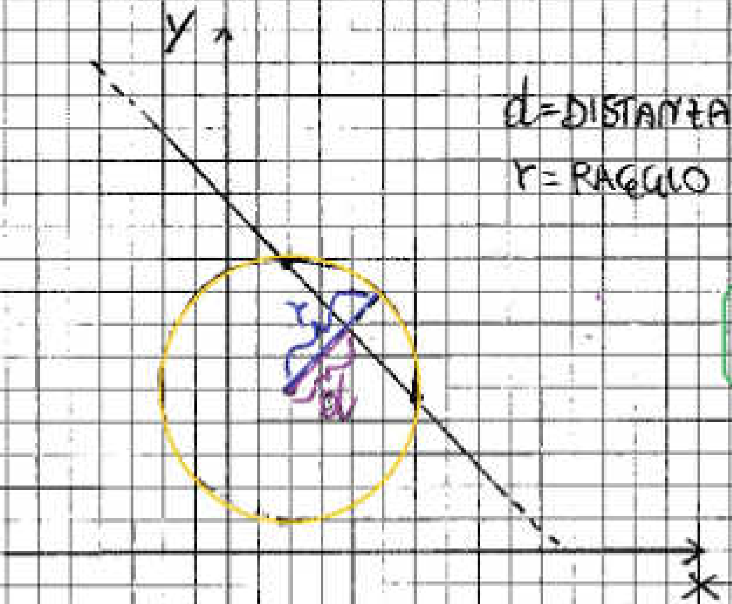
r = RAGGIO

$$\boxed{d = r}$$

3) SE $\Delta > 0$ - POSITIVO

DUE SOLUZIONI REALI E DISTINTE E QUINDI LA RETTA E LA CIRCONFERENZA HANNO 2 PUNTI IN COMUNE, CIOÈ:

RETTA SECANTE LA CIRCONFERENZA



d = DISTANZA DELLA RETTA DAL CENTRO

r = RAGGIO

$$\boxed{d < r}$$

POSIZIONE RECIPROCA TRA DUE CIRCONFERENZE

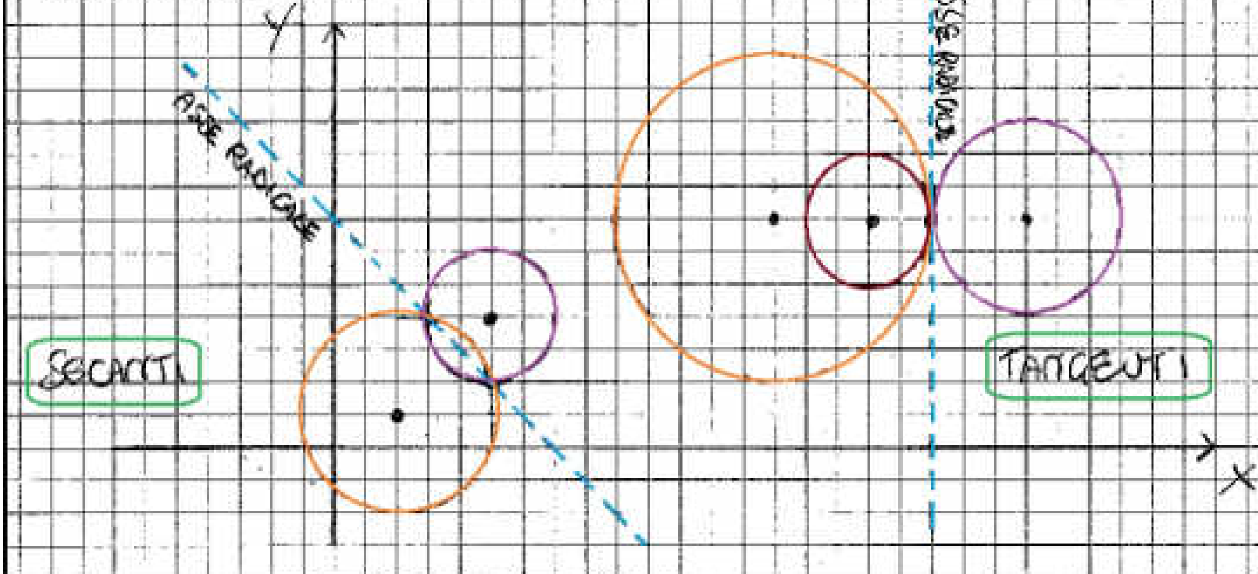
MOLTO SPESSO SI AFFRONTA LA RICERCA DEGLI EVENTUALI PUNTI DI INTERSEZIONE TRA DUE CIRCONFERENZE, MEDIANTE LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA COSTITUITO DALLE LORO EQUAZIONI:

$$\begin{cases} x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

SE LE DUE CIRCONFERENZE NON SONO CONCENTRICHE (NON HANNO LO STESSO CENTRO), ALLORA SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO LE 2 EQUAZIONI SI OTTIENE IL SISTEMA EQUIVALENTE:

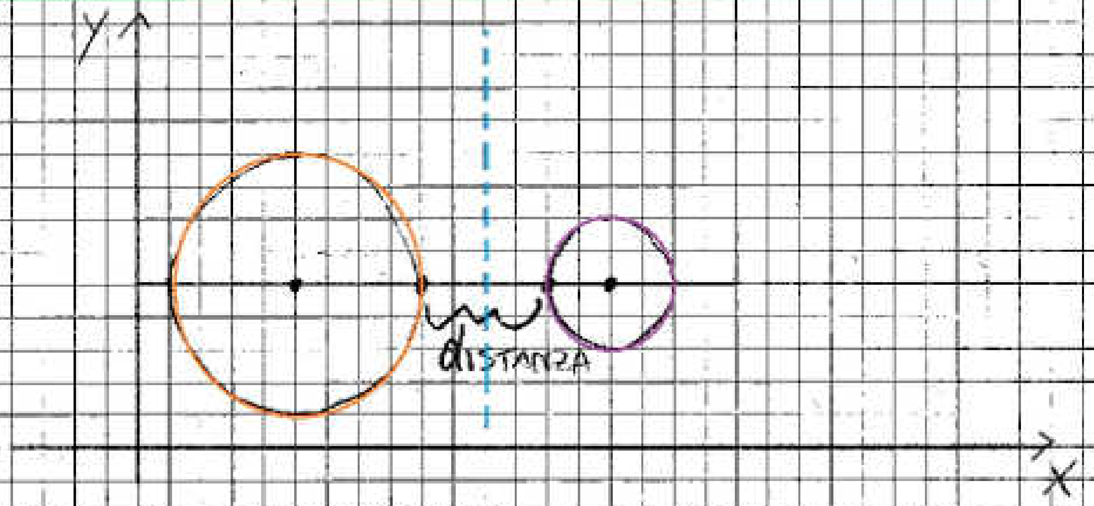
$$\begin{cases} x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0 \end{cases}$$

RICONDUCENDO IL TUTTO ALLA RICERCA DEI PUNTI DI INTERSEZIONE TRA LA PRIMA CIRCONFERENZA ED UNA RETTA DETTA "ASSE RADICALE", ALLA QUALE APPARTENGONO TUTTI GLI EVENTUALI PUNTI DI INTERSEZIONE DELLE DUE CIRCONFERENZE



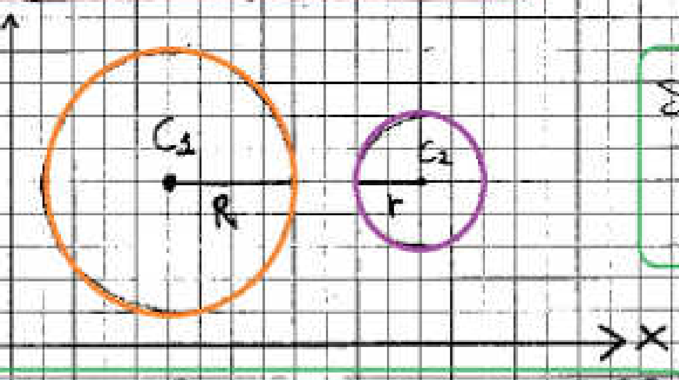
TALE RETTA CONGIUNGE I PUNTI DI INTERSEZIONE SE LE DUE CIRCONFERENZE SONO SECANTI OPPURE È LA TANGENTE COMUNE SE SONO TANGENTI.

NEL CASO LE DUE CIRCONFERENZE NON HANNO PUNTI IN COMUNE, TALE RETTA RAPPRESENTA L'ASSE DEL SEGMENTO RELATIVO ALLA DISTANZA TRA LE CIRCONFERENZE:



IN BASE ALLA DISTANZA TRA I 2 CENTRI E LA MISURA DEI RAGGI SI POSSONO STABILIRE LE SEGUENTI 6 POSIZIONI RECIPROCHE:

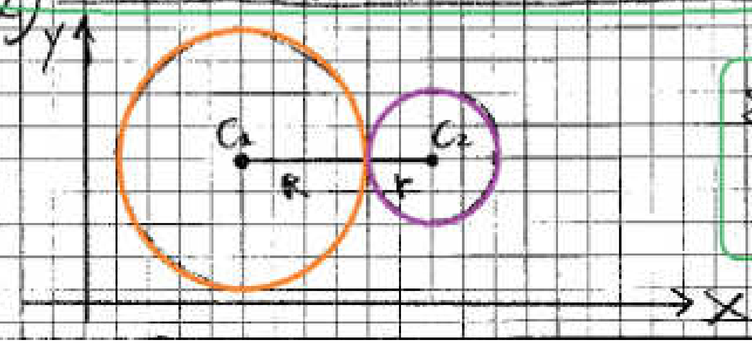
1) CIRCONFERENZE ESTERNE



SE

$$\overline{C_1C_2} > R+r$$

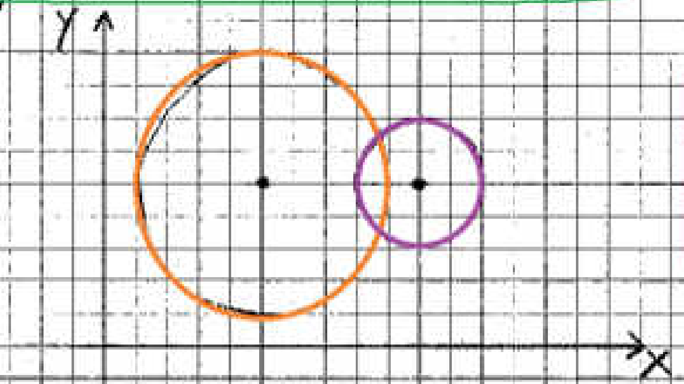
2) CIRCONFERENZE TANGENTI ESTERNE



SE

$$\overline{C_1C_2} = R+r$$

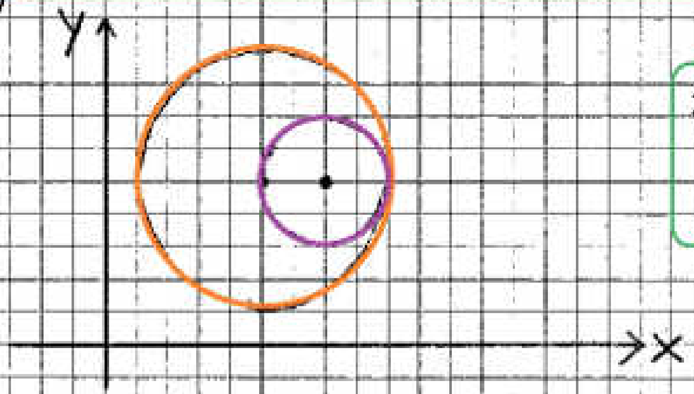
3) CIRCONFERENZE SECANTI



SE

$R - r < \overline{C_1C_2} < R + r$

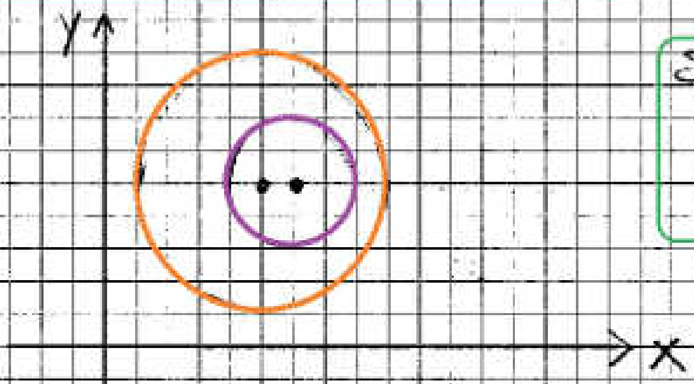
4) CIRCONFERENZE TANGENTI INTERNE



SE

$\overline{C_1C_2} = R - r$

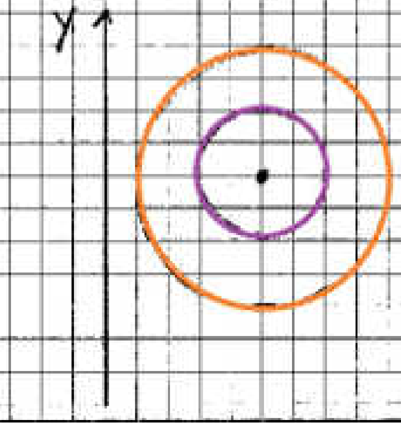
5) CIRCONFERENZE INTERNE



SE

$\overline{C_1C_2} < R - r$

6) CIRCONFERENZE CONCENTRICHE



SE

$\overline{C_1C_2} = 0$

3

RICERCA DELLE EQUAZIONI DELLE RETTE TANGENTI

A) RETTE TANGENTI CONDOTTE DA UN PUNTO ESTERNO ALLA CIRCONFERENZA.

CONSIDERIAMO LA GENERICA CIRCONFERENZA

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

E UN PUNTO ESTERNO AD ESSA $P_0(x_0;y_0)$.

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE PROPRIO DI CENTRO P_0, CIOÈ:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

CHE RISCRIVIAMO PORTANDO TUTTO AL SECONDO MEMBRO:

$$\boxed{m(x-x_0)-y+y_0=0}$$

UTILIZZANDO LA FORMULA DELLA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN FORMA ESPLICITA

$$\boxed{d=\frac{|m(x-x_0)-y+y_0|}{\sqrt{1+m^2}}} \qquad \boxed{\left(d=\frac{|mx-y+q|}{\sqrt{1+m^2}}\right)}$$

IMPONIAMO CHE LA DISTANZA TRA IL CENTRO

$$C(\alpha;\beta)$$

DELLA CIRCONFERENZA E IL FASCIO DI RETTE, SIA UGUALE AL RAGGIO r:

$$\boxed{\frac{|m(\alpha-x_0)-\beta+y_0|}{\sqrt{1+m^2}}=r}$$

ELEVIAMO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO E SVILUPPIAMO I CALCOLI:

$$\boxed{\frac{\left[m(\alpha - x_0) - \beta + y_0\right]^2}{m^2+1} = r^2}$$

CIOÈ:

$$\boxed{\left[m(\alpha - x_0) - \beta + y_0\right]^2 = r^2(m^2+1)}$$

SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI II° GRADO NELL'UNICA INCOGNITA m.

RISOLVENDOLA OTTENIAMO I VALORI m_1 ED m_2 CHE SOSTITUITI NELL'EQUAZIONE DEL FASCIO DANNO LE EQUAZIONI DELLE RETTE TANGENTI:

$$\boxed{\begin{array}{l} y - y_0 = m_1(x - x_0) \\ y - y_0 = m_2(x - x_0) \end{array}}$$

B) RETTA TANGENTE IN UN PUNTO APPARTENENTE ALLA CIRCONFERENZA

CONSIDERIAMO UN PUNTO APPARTENENTE ALLA CIRCONFERENZA:

$$P(x_0; y_0)$$

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

EFFETTUIAMO LE SEGUENTI SOSTITUZIONI:

$$x^2 = x_0 \cdot x \quad E \quad y^2 = y_0 \cdot y$$

$$x = \frac{x_0 + x}{2} \quad E \quad y = \frac{y_0 + y}{2}$$

FORMULA DI SDOPPIAMENTO

E RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA.

$$\boxed{x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + a \cdot \frac{x_0 + x}{2} + b \cdot \frac{y_0 + y}{2} + c = 0}$$

A QUESTO PUNTO SVILUPPANDO I CALCOLI SI OTTIENE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $P(x_0; y_0)$.

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

C) RETTA TANGENTE CON COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE IMPROPRIO

$$y = mx + q$$

IN CUI m È IL COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO.

SOSTITUIAMO LA y NELL'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA:

$$x^2 + (mx+q)^2 + ax + b(mx+q) + c = 0$$

SVILUPPIAMO E ORDINIAMO RISPETTO ALLA x, CALCOLIAMO IL Δ E LO IMPONIAMO UGUALE A ZERO (CONDIZIONE DI TANGENZA), OTTENENDO UNA EQUAZIONE DI II° GRADO NELL'INCOGNITA "q", LE CUI SOLUZIONI q_1 E q_2 SI SOSTITUISCONO NELL'EQUAZIONE DEL FASCIO OTTENENDO LE RETTE TANGENTI:

$$y = mx + q_1$$
$$y = mx + q_2$$

FASCIO DI CIRCONFERENZE

SIANO C_1 E C_2 DUE CIRCONFERENZE CHE PRENDONO IL NOME DI CIRCONFERENZE GENERATRICI:

$$C_1)\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad C_2)\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

CONSIDERIAMO UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE*, DEL TIPO $C_1 + kC_2 = 0$, CIOÈ:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

CON $k \in \mathbb{R}$ PARAMETRO REALE.

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

★ UNA COMBINAZIONE LINEARE È UNA ESPRESSIONE DI I° GRADO IN CUI COMPAIONO SOMME DI ELEMENTI NON SCALARI (NEL NOSTRO CASO POLINOMI...) GLI STESSI MOLTIPLICATI PER SCALARI (K).

OTTENIAMO COSÌ L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI CIRCONFERENZE GENERATO DA C_1 E C_2, DALLA QUALE AL VARIARE DI K SI OTTENGONO INFINITE CIRCONFERENZE.

LA GENERATRICE C_1 SI OTTIENE DALL'EQUAZIONE DEL FASCIO PER $K=0$ MENTRE LA C_2 NON SI OTTIENE PER ALCUN VALORE DI K.

SE C_1 E C_2 HANNO PUNTI IN COMUNE, QUESTI PRENDONO IL NOME DI PUNTI BASE

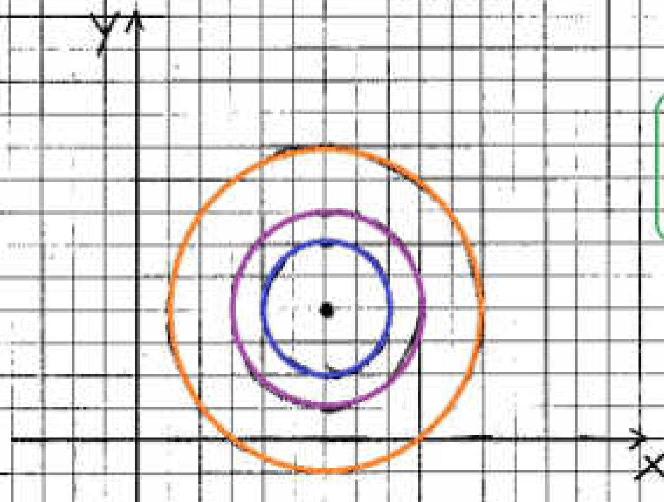
PER DETERMINARE I PUNTI BASE BASTA METTERE A SISTEMA LE EQUAZIONI C_1 E C_2:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

E RISOLVENDO IL SISTEMA:

1) SE $a=a' \vee b=b'$

LE CIRCONFERENZE GENERATRICI SONO CONCENTRICHE



IL SISTEMA È IMPOSSIBILE
IL FASCIO NON HA PUNTI BASE

④

2) SE $a \neq a' \vee b \neq b'$

LE CIRCONFERENZE GENERATRICI NON SONO CONCENTRICHE E SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO NEL SISTEMA, SI OTTIENE:

$$\boxed{(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0}$$

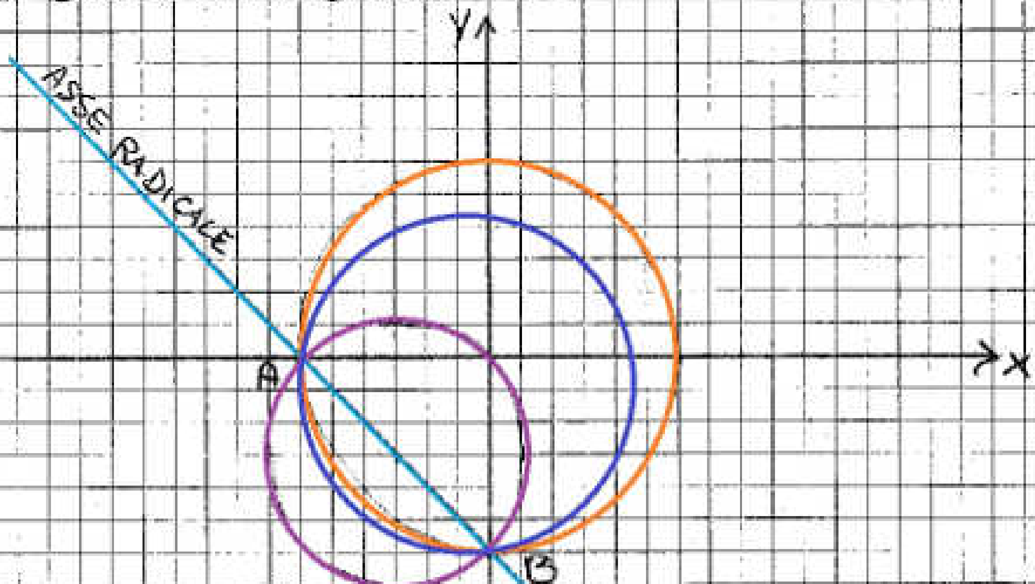
CHE È L'EQUAZIONE DELLA RETTA DETTA ASSE RADICALE DEL FASCIO, CHE PUÒ ESSERE CONSIDERATA UNA CIRCONFERENZA DEGENERE DI RAGGIO INFINITAMENTE GRANDE.

INSERENDO NEL SISTEMA QUESTA EQUAZIONE AL POSTO DELLA C_2, IL SISTEMA DA QUARTO GRADO DIVENTA DI II° GRADO

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0 \end{cases}$$

COSÌ CHE:

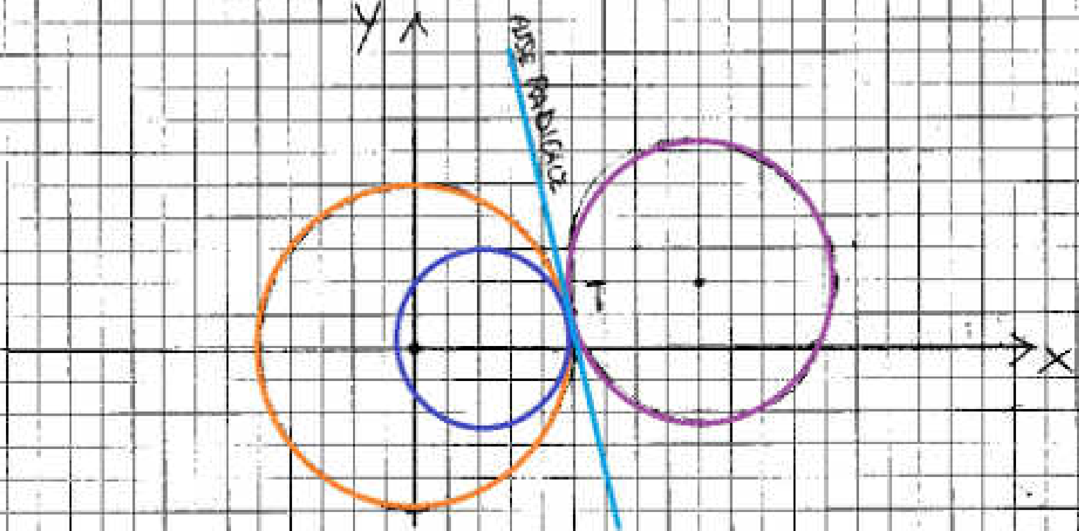
I) SE IL SISTEMA HA DUE SOLUZIONI REALI E DISTINTE, I PUNTI A E B, IL FASCIO HA DUE PUNTI BASE: A E B.
TUTTE LE CIRCONFERENZE DEL FASCIO SONO SECANTI NEI DUE PUNTI BASE.



IL FASCIO CONTIENE UNA CIRCONFERENZA DEGENERE CIOÈ L'ASSE RADICALE.

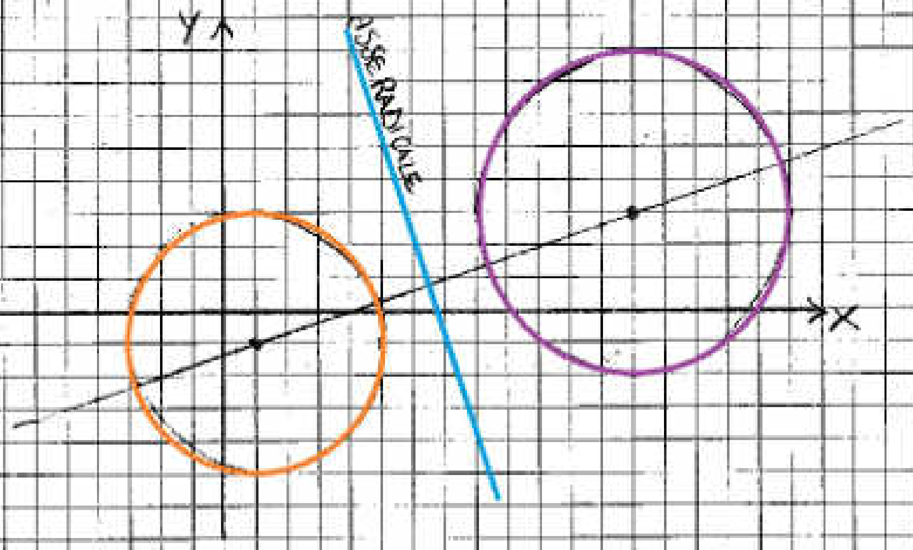
TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

II) SE IL SISTEMA HA DUE SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI, IL PUNTO T, IL FASCIO HA UN PUNTO BASE: T.
TUTTE LE CIRCONFERENZE DEL FASCIO SONO TANGENTI NEL PUNTO T ALL'ASSE RADICALE.



IL FASCIO CONTIENE DUE CIRCONFERENZE DEGENERI, CIOÈ L'ASSE RADICALE E LA CIRCONFERENZA DI CENTRO T E RAGGIO NULLO.

III) SE IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI REALI IL FASCIO NON HA PUNTI BASE, LE CIRCONFERENZE NON HANNO PUNTI IN COMUNE.



IL FASCIO CONTIENE UNA CIRCONFERENZA DEGENERE, CIOÈ L'ASSE RADICALE.

ESEMPI

1) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DATO IL CENTRO $C\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ E IL RAGGIO $r = \sqrt{5}$:

$$\alpha = -3 \qquad \beta = \frac{5}{2} \qquad r = \sqrt{5}$$

COSÌ:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$(x+3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = 5$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 5y + \frac{25}{4} + 4 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 6x - 5y + \frac{41}{4} = 0}$$

2) STABILIRE SE LE SEGUENTI EQUAZIONI RAPPRESENTANO UNA CIRCONFERENZA:

a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 16 = 0$

a) TRASFORMIAMO L'EQUAZIONE IN FORMA CANONICA:

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

DETERMINIAMO LE COORDINATE DEL CENTRO

$$\alpha = -\frac{a}{2} = +\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \qquad \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}$$

CALCOLIAMO IL RAGGIO

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

CIOÈ

$$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{25}{16} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9+25-8}{16}} = \sqrt{\frac{26}{16}} \quad \text{REALE}$$

QUINDI L'EQUAZIONE a RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA.

b) $\alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \qquad \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$

$r = \sqrt{1^2 + 2^2 - 16} = \sqrt{5-16} = \sqrt{-11}$ NON REALE (COMPLESSO!)

QUINDI L'EQUAZIONE b NON RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA

3) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER TRE PUNTI P, Q E R E DETERMINARNE CENTRO E RAGGIO

$P(4;4) \quad Q(-7;7) \quad R(-5;7)$

IMPONIAMO IL PASSAGGIO DELLA CIRCONFERENZA PER I TRE PUNTI:

$$\begin{cases} 4^2 + 4^2 + a \cdot 4 + b \cdot 4 + c = 0 & \text{PASSAGGIO PER } P \\ (-7)^2 + 7^2 + a \cdot (-7) + b \cdot 7 + c = 0 & \text{〃 〃 } Q \\ (-5)^2 + 7^2 + a \cdot (-5) + b \cdot 7 + c = 0 & \text{〃 〃 } R \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + 16 + 4a + 4b + c = 0 \\ 49 + 49 - 7a + 7b + c = 0 \\ 25 + 49 - 5a + 7b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -32 - 4a - 4b \\ 7b = -98 + 7a - c \\ 5a = 74 + 7b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -32 - 4a - 4b \\ 7b = -98 + 7a - c \\ 5a = 74 - 98 + 7a - \cancel{c} + \cancel{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -32 - 4a - 4b \\ 7b = -98 + 7a - c \\ 2a = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -32 - 4 \cdot 12 - 4b \\ 7b = -98 + 7 \cdot 12 - c \\ a = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -80 - 4b \\ 7b = -98 + 84 + 80 + 4b \\ a = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -80 - 4b \\ 3b = 66 \\ a = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -80 - 4 \cdot 22 \\ b = 22 \\ a = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -168 \\ b = 22 \\ a = 12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 12x + 22y - 168 = 0}$$

$\alpha = -\frac{12}{2} = -6 \quad \beta = -\frac{22}{2} = -11 \Rightarrow \boxed{C(-6;-11)}$

$\boxed{r} = \sqrt{(-6)^2 + (-11)^2 + 168} = \sqrt{36 + 121 + 168} = \sqrt{325} = \sqrt{5^2 \cdot 13} = \boxed{5\sqrt{13}}$

(5)

4) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA CON CENTRO $C(1;1)$ E PASSANTE PER $A(5;4)$.

CALCOLIAMO IL RAGGIO, CIOÈ LA DISTANZA DI A DA C:

$$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(1-4)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

COSÌ POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=5^2$$

CIOÈ:

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=25$$

$$\boxed{x^2+y^2-2x-2y-23=0}$$

5) DATA LA CIRCONFERENZA

$$\boxed{x^2+y^2-3x-y-4=0}$$

STABILIRE SE I PUNTI

$$P(-1;3) \qquad Q(3;-1) \qquad R(2;3)$$

SONO INTERNI, ESTERNI O APPARTENENTI ALLA CIRCONFERENZA.

CALCOLIAMO CENTRO E RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA:

$$\alpha=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2} \qquad \beta=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+4}=\sqrt{\frac{9+1+16}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\sqrt{\frac{13}{2}}$$

A QUESTO PUNTO CALCOLIAMO LE DISTANZE DEI PUNTI DAL CENTRO E VERIFICHIAMO SE SONO MINORI, MAGGIORI O UGUALI AL RAGGIO:

$$\overline{PC}=\sqrt{\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}>\sqrt{\frac{13}{2}}$$

QUINDI IL PUNTO P È ESTERNO ALLA CIRCONFERENZA.

$\overline{QC} = \sqrt{\left(3-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} < \sqrt{\frac{13}{2}}$

QUINDI IL PUNTO Q È INTERNO ALLA CIRCONFERENZA

$\overline{RC} = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

QUINDI IL PUNTO R APPARTIENE ALLA CIRCONFERENZA.

6) VERIFICARE CHE LA RETTA $2x-y-5=0$ È TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA $x^2+y^2-2x-4y=0$

PONIAMO A SISTEMA LE 2 EQUAZIONI:

$\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x^2+(2x-5)^2-2x-4(2x-5)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-5 \\ x^2+4x^2-20x+25-2x-8x+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-5 \\ 5x^2-30x+45=0 \end{cases}$

$5x^2-30x+45=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0$

$\Delta = 36-36=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{0}}{2} = 3$

$y = 2\cdot 3-5 = 1$

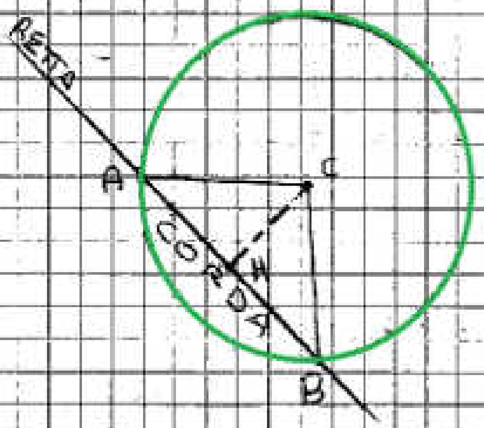
QUINDI LA RETTA È TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA NEL PUNTO DI COORDINATE $(3;1)$.

7) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO $C(-1;4)$ CHE STACCA SULLA RETTA DI EQUAZIONE $x+y-1=0$ UNA CORDA DI LUNGHEZZA $2\sqrt{2}$.

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

DALLE COORDINATE DEL CENTRO, POSSIAMO CALCOLARE SOLO I COEFFICIENTI $a=2$ $\left(-\frac{a}{2}=-1 \Rightarrow a=2\right)$ E $b=-8$ $\left(-\frac{b}{2}=4 \Rightarrow b=-8\right)$ MA MANCA COMUNQUE IL COEFFICIENTE C.

DISEGNIAMO IN MANIERA GENERICA LA POSIZIONE RECIPROCA CHE DEVONO AVERE LA CIRCONFERENZA E LA RETTA:



VEDIAMO CHE CONGIUNGENDO I PUNTI A E B, DI INTERSEZIONE DELLA RETTA E LA CIRCONFERENZA, CON IL CENTRO DELLA STESSA, SI OTTIENE UN TRIANGOLO ISOSCELE LA CUI BASE È PROPRIO LA CORDA, MENTRE I DUE LATI MISURANO IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA.
CALCOLANDO LA DISTANZA DEL CENTRO DALLA RETTA, OTTENIAMO PROPRIO L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO:

$$\overline{CH}=\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

VISTO CHE LA METÀ DELLA BASE È $\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, CONSIDERANDO IL TRIANGOLO $\widehat{ACH}$, APPLICANDO IL TEOREMA DI PITAGORA POSSIAMO CALCOLARE $\overline{AC}$, CIOÈ IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA:

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2+\frac{4}{2}}=\sqrt{4}=2$$

A QUESTO PUNTO CON IL CENTRO ED IL RAGGIO, POSSIAMO

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA:

$$(x+1)^2+(y-4)^2=2^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-8y+16-4=0$$

E CIOÈ:

$$\boxed{x^2+y^2+2x-8y+13=0}$$

8) UN TRIANGOLO HA I VERTICI NEI PUNTI $A(-5;0)$, $B(5;0)$ E $C(-3;4)$. SCRIVERE LE EQUAZIONI DELLE CIRCONFERENZE RISPETTIVAMENTE CIRCOSCRITTA ED INSCRITTA NEL TRIANGOLO ABC.

CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA

PER DETERMINARE LA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA IMPONIAMO IL PASSAGGIO DELLA GENERICA CIRCONFERENZA

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

PER TUTTI E TRE I VERTICI DEL TRIANGOLO, CIOÈ:

$$\begin{cases} (-5)^2+0^2+a(-5)+b\cdot(0)+c=0 & \text{PASSAGGIO PER } A \\ 5^2+0^2+a\cdot 5+b\cdot(0)+c=0 & \text{" " } B \\ (-3)^2+4^2+a(-3)+b(4)+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25-5a+c=0 \\ 25+5a+c=0 \\ 9+16-3a+4b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a=25+c \\ c=-5a-25 \\ -3a+4b+c+25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-25 \end{cases}$$

COSÌ:

$$\boxed{x^2+y^2-25=0}$$

È L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA AL TRIANGOLO ABC.

1

CIRCONFERENZA INSCRITTA

DALLA GEOMETRIA EUCLIDEA SAPPIAMO CHE IN UN TRIANGOLO, L'INCENTRO, CIOÈ IL PUNTO DI INTERSEZIONE DI TUTTE LE BISETTRICI DEGLI ANGOLI, CORRISPONDE AL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA IN ESSO INSCRITTA.
PER CALCOLARE QUINDI LE COORDINATE DELL'INCENTRO, SI APPLICA LA FORMULA

$$(X_I; Y_I) = \left(\frac{a \cdot X_A + b \cdot X_B + c \cdot X_C}{\text{PERIMETRO}} ; \frac{a \cdot Y_A + b \cdot Y_B + c \cdot Y_C}{\text{PERIMETRO}} \right)$$

IN CUI RIENTRANO LE COORDINATE DEI TRE PUNTI CHE RAPPRESENTANO I VERTICI DEL TRIANGOLO, IL PERIMETRO E LE LUNGHEZZE DEI LATI TALI CHE

$$a = \overline{BC} \qquad b = \overline{AC} \qquad c = \overline{AB}$$

SONO LE LUNGHEZZE DEI LATI OPPOSTI AGLI OMONIMI VERTICI.
CALCOLIAMO QUINDI LE LUNGHEZZE DEI LATI, CIOÈ LE DISTANZE DEI PUNTI A DUE A DUE:

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(5+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(-5+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-5-5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

SOMMIAMO I TRE LATI ED OTTENIAMO IL PERIMETRO:

$$\text{PERIMETRO} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 10 = 10 + 6\sqrt{5} = 2(5 + 3\sqrt{5})$$

A QUESTO PUNTO CALCOLIAMO L'INCENTRO, LE CUI

COORDINATE CORRISPONDERANNO A QUELLE DEL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA:

$$X_I = \frac{aX_A + bX_B + cX_C}{\text{PERIMETRO}} = \frac{4\sqrt{5}\cdot(-5) + 2\sqrt{5}\,(5) + 10\,(-3)}{2(5+3\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{-20\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 30}{2(5+3\sqrt{5})} = \frac{\overset{15}{\cancel{30}} - \overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{5}}{\cancel{2}(5+3\sqrt{5})} = \frac{-15-5\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}$$

A QUESTO PUNTO RAZIONALIZZIAMO LA FRAZIONE OTTENUTA:

$$X_I = \frac{-15-5\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} \cdot \frac{5-3\sqrt{5}}{5-3\sqrt{5}} = \frac{\cancel{-75} + 45\sqrt{5} - 25\sqrt{5} + \cancel{75}}{25 - 9\cdot 5} = \frac{20\sqrt{5}}{-20} = -\sqrt{5} = \alpha$$

MENTRE:

$$Y_I = \frac{4\sqrt{5}\cdot(0) + 2\sqrt{5}\cdot(0) + 10\,(4)}{2(5+3\sqrt{5})} = \frac{20}{5+3\sqrt{5}}$$

RAZIONALIZZIAMO ANCHE QUI:

$$Y_I = \frac{20}{5+3\sqrt{5}} \cdot \frac{5-3\sqrt{5}}{5-3\sqrt{5}} = \frac{100-60\sqrt{5}}{25-9\cdot 5} = -5+3\sqrt{5} = \beta$$

ADESSO NON RIMANE CHE CALCOLARE IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA, CHE SAPPIAMO ESSERE LA DISTANZA DEL CENTRO DA UNO QUALSIASI DEI TRE LATI.

A TAL FINE DETERMINIAMO LA RETTA PASSANTE PER I VERTICI B E C.

OSSERVAZIONE:

IN QUESTO CASO SI POTREBBE CONSIDERARE L'ASSE DELLE ASCISSE, IN QUANTO LA BASE DEL TRIANGOLO SI TROVA SU DI ESSO, MA PER COMPLETEZZA DI CALCOLI E RAGIONAMENTO CONSIDERIAMO LA RETTA PER B E C.

LA RETTA PASSANTE PER I PUNTI B E C È DATA DA:

$$\frac{X - X_B}{X_C - X_B} = \frac{Y - Y_B}{Y_C - Y_B}$$

TEORIA SULLA CIRCONFERENZA

CIOÈ:
$$\frac{x-5}{-3-5}=\frac{y-0}{4-0}$$
$$4x-20=-8y$$
$$4x+8y-20=0$$

CALCOLIAMO COSÌ LA DISTANZA DEL CENTRO DI COORDINATE α E β CALCOLATE IN PRECEDENZA, E QUESTA RETTA, MEDIANTE LA FORMULA DELLA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA, DISTANZA CHE CORRISPONDERÀ AL RAGGIO, CIOÈ:

$$\text{RAGGIO}=\frac{|4\alpha+8\cdot\beta+c|}{\sqrt{4^2+8^2}}=\frac{|4(-\sqrt5)+8(3\sqrt5-5)-20|}{4\sqrt5}=$$
$$=\frac{|-4\sqrt5+24\sqrt5-40-20|}{4\sqrt5}=$$
$$=\frac{|20\sqrt5-60|}{4\sqrt5}$$

RAZIONALIZZIAMO:
$$\text{RAGGIO}=\frac{|20\sqrt5-60|}{4\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt5}=\frac{|100-60\sqrt5|}{20}=|5-3\sqrt5|$$

INFINE MEDIANTE L'ORMAI NOTA FORMULA:
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

DETERMINIAMO L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA INSCRITTA:
$$(x+\sqrt5)^2+(y+5-3\sqrt5)^2=(5-3\sqrt5)^2$$
$$x^2+2\sqrt5x+5+y^2+25+\cancel{45}+10y-6\sqrt5y-\cancel{30\sqrt5}=25-\cancel{30\sqrt5}+\cancel{45}$$

CIOÈ:
$$\boxed{x^2+y^2+2\sqrt5x+2(5-3\sqrt5)y+5=0}$$

9) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA CHE PASSA PER I PUNTI $A(1;3)$ E $B(-1;1)$ E HA IL CENTRO SULLA RETTA DI EQUAZIONE $3x+y+8=0$

$$\begin{cases} 1^2+3^2+a\cdot 1+b\cdot 3+c=0 \\ (-1)^2+1^2+a\cdot(-1)+b\cdot 1+c=0 \\ 3\left(-\frac{a}{2}\right)-\frac{b}{2}+8=0 \end{cases}$$

PASSAGGIO PER A

" " B

APPARTENENZA ALLA RETTA DEL CENTRO DI COORDINATE $\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

$$\begin{cases} 10+b+c+2+3b+c=0 \\ a=b+c+2 \\ -\frac{3}{2}a-\frac{b}{2}+8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-2b-6 \\ a=b-2b-6+2 \\ -\frac{3}{2}a-\frac{b}{2}+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2b-6 \\ a=-b-4 \\ -\frac{3}{2}(-b-4)-\frac{b}{2}+8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-2b-6 \\ a=-b-4 \\ \frac{3}{2}b+6-\frac{b}{2}+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-(-15)-4 \\ b=-15 \\ c=-2(-15)-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=-15 \\ c=24 \end{cases}$$

COSÌ:

$$\boxed{x^2+y^2+11x-15y+24=0}$$

10) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA CHE PASSA PER I PUNTI $A(3;2)$ E $B(0;-1)$ ED È TANGENTE ALLA RETTA DI EQUAZIONE $y=2x-1$.

AFFINCHÉ LA GENERICA CIRCONFERENZA E LA RETTA DATA SIANO TANGENTI BISOGNA RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

7

CIOE:

$$x^2+(2x-1)^2+ax+b(2x-1)+c=0$$

E RISOLVENDO IMPONIAMO CHE IL Δ SIA NULLO (CONDIZIONE DI TANGENZA...):

$$x^2+4x^2-4x+1+ax+2bx-b+c=0$$

$$5x^2+(a+2b-4)x+1-b+c=0$$

$$\Delta=(a+2b-4)^2-4\cdot5\,(1-b+c)=0$$

$$a^2+4b^2+16+4ab-8a-16b-20+20b-20c=0$$

$$a^2+4b^2+4ab-8a+4b-20c-4=0$$

A QUESTO PUNTO ABBIAMO LE TRE CONDIZIONI:

$$\begin{cases} 3^2+2^2+a\cdot3+b\cdot2+c=0 & \text{PASSAGGIO PER } A \\ 0^2+(-1)^2+a\cdot0+b\cdot(-1)+c=0 & \text{// // } B \\ a^2+4b^2+4ab-8a+4b-20c-4=0 & \text{TANGENZA CON LA RETTA} \end{cases}$$

RISOLVENDO SI OTTIENE:

$$\begin{cases} a=-12 \\ b=8 \\ c=7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2-12x+8y+7=0}$$