DEFINIZIONE DI LOGARITMO

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

SI DEFINISCE LOGARITMO DI BASE "a" DEL NUMERO "b" L'ESPONENTE DA ATTRIBUIRE ALLA BASE "a" PER OTTENERE UNA POTENZA UGUALE ALL'ARGOMENTO "b", CIOE:

$$\log_a b = x \quad \text{SE E SOLO SE} \quad a^x = b$$

DOVE "a" È DETTA BASE DEL LOGARITMO ED È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO $(a>0)$ E DIVERSO DA 1 $(a \neq 1)$

MENTRE "b" È DETTO ARGOMENTO DEL LOGARITMO CHE È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO $(b>0)$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI

1)

$$a^{\log_a b} = b \quad [a>0, a\neq 1, b>0]$$

INFATTI $\log_a b$ È L'ESPONENTE DA ATTRIBUIRE ALLA BASE "a" PER OTTENERE "b".

2)

$$\log_a a^c = c \quad [a>0, a\neq 1]$$

INFATTI L'ESPONENTE DA ATTRIBUIRE AD "a" PER OTTENERE a^c È PROPRIO "c".

3)

$$\log_a 1 = 0 \quad [a>0, a\neq 1]$$

INFATTI ZERO È L'ESPONENTE DA ATTRIBUIRE AD "a" PER OTTENERE 1 (VEDI REGOLE DELLE POTENZE).

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

4) $\log_a a = 1 \quad [a>0,\ a\neq 1]$

INFATTI 1 È L'ESPONENTE DA ATTRIBUIRE AD "a" PER OTTENERE "a" -

DALLA DEFINIZIONE DI LOGARITMO È EVIDENTE COME SI PUÒ PASSARE VELOCEMENTE DALLE UGUAGLIANZE IN FORMA ESPONENZIALE ALLE UGUAGLIANZE IN FORMA LOGARITMICA E VICEVERSA, COME AD ESEMPIO:

- $2^3 = 8$ EQUIVALE A SCRIVERE $\log_2 8 = 3$
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \iff 3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $10^3 = 1000 \iff \log_{10} 1000 = 3$
- $\log_a \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \iff a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

SEMPRE DALLA DEFINIZIONE IL CALCOLO DEI LOGARITMI È PARTICOLARMENTE SEMPLICE E NEL CASO DI SITUAZIONI PIÙ COMPLESSE SI PUÒ RICORRERE ALL'USO DI UNA CALCOLATRICE SCIENTIFICA -

ESEMPI:

1) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

2) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

3) $\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 \left(\frac{1}{2^4}\right) = \log_2 2^{-4} = -4$

4) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = \log_{\frac{1}{5}} 5^2 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = -2$

5) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{125}{8} = \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 3$

6) $\log_{\frac{2}{7}} \frac{4}{49} = \log_{\frac{2}{7}} \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 2$

DETERMINARE IL LOGARITMO, NOTI BASE E ARGOMENTO

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE

$$x = \log_{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{81}$$

DALLA DEFINIZIONE ABBIAMO:

$$\left(3\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}$$

UNA EQUAZIONE ESPONENZIALE CHE PORTEREMO IN FORMA CANONICA:

$$\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4}$$

$$\left[3^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\right]^x = \left(3^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^x = 3^{\frac{4}{3}}$$

$$3^{\frac{3}{2}x} = 3^{\frac{4}{3}}$$

CHE È LA FORMA CANONICA, QUINDI UGUAGLIANDO GLI ESPONENTI:

$$\frac{3}{2}x = \frac{4}{3}$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

$$x = \frac{8}{9}$$

E CIOÈ:

$$\log_{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{81} = \frac{8}{9}$$

DETERMINARE L'ARGOMENTO, NOTI BASE E LOGARITMO

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE:

$$\log_{\frac{4}{9}} x = 0{,}5$$

DALLA DEFINIZIONE ABBIAMO:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{0{,}5} = x$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = x$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = x$$

$$\frac{2}{3} = x$$

DETERMINARE LA BASE, NOTI ARGOMENTO E LOGARITMO

SUPPONIAMO DI VOLER CALCOLARE:

$$\log_{x} \frac{64}{27} = 3$$

DALLA DEFINIZIONE:

$$x^3 = \frac{64}{27} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\frac{4^3}{3^3}}$$

CIOÈ:

$$x = \frac{4}{3}$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

NEL CALCOLO DEI LOGARITMI SI USANO COMUNEMENTE I LOGARITMI IN BASE 10 (DETTI DECIMALI) OPPURE QUELLI IN BASE "e" (NUMERO DI NEPERO, IRRAZIONALE CON VALORE APPROSSIMATO A 2,71828) DETTI NATURALI.
LA LORO NOTAZIONE È:

LOGARITMI NATURALI	LOGARITMI DECIMALI
$\log_e N$	$\log_{10} N$
$\log N$	$\text{Log}\, N$
$\ln N$	

LOGARITMI E CALCOLATRICI SCIENTIFICHE

FACENDO USO DI UNA CALCOLATRICE SCIENTIFICA PER IL CALCOLO DEI LOGARITMI, BISOGNA QUINDI TENER PRESENTE CHE QUELLI NATURALI SI CALCOLANO MEDIANTE IL TASTO $\boxed{\ln}$, MENTRE QUELLI DECIMALI MEDIANTE IL TASTO $\boxed{\log}$.
VISTO POI CHE I LOGARITMI DECIMALI DI NUMERI RAZIONALI CHE NON SONO POTENZE DI 10 SONO NUMERI IRRAZIONALI, PER QUESTI, LA CALCOLATRICE FORNISCE VALORI APPROSSIMATI, IN QUANTO PUÒ MOSTRARE SOLO UN NUMERO FINITO DI CIFRE DECIMALI.

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

QUALUNQUE SIA LA BASE, I LOGARITMI GODONO DI IMPORTANTI PROPRIETÀ DERIVANTI DALLE PROPRIETÀ DELLE POTENZE.

1) IL LOGARITMO DI UN PRODOTTO DI DUE O PIÙ NUMERI POSITIVI È UGUALE ALLA SOMMA DEI LOGARITMI DEI SINGOLI FATTORI

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n \quad [a>0, a \neq 1, m, n > 0]$$

DIMOSTRAZIONE

CHIAMIAMO

$$\log_a m = x$$

PER DEFINIZIONE

$$a^x = m$$

CIOÈ

$$a^{\log_a m} = m$$

ANALOGAMENTE

$$a^{\log_a n} = n$$

MOLTIPLICANDO MEMBRO A MEMBRO QUESTE DUE UGUAGLIANZE SI OTTIENE:

$$a^{\log_a m} \cdot a^{\log_a n} = m \cdot n$$

PER LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$a^{\log_a m + \log_a n} = m\, n$$

RITORNANDO INDIETRO DALLA DEFINIZIONE DI LOGARITMO.

$$\log_a m + \log_a n = \log_a m \cdot n$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

ESEMPIO:

$$\log_2(4\sqrt{2}) = \log_2 4 + \log_2 \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

OSSERVAZIONE:

$$\log_2[(-2)(-4)] \neq \log_2(-2) + \log_2(-4)$$

PERCHÉ

$$\log_2[(-2)(-4)] = \log_2 8 \quad \text{ESISTE!}$$

MA:

$\log_2(-2)$ e $\log_2(-4)$ PER DEFINIZIONE NON ESISTONO!

2) IL LOGARITMO DI UN QUOZIENTE DI DUE NUMERI POSITIVI È UGUALE ALLA DIFFERENZA TRA IL LOGARITMO DEL NUMERATORE ED IL LOGARITMO DEL DENOMINATORE.

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \quad [a>0, a\neq 1, m,n>0]$$

DIMOSTRAZIONE:

CHIAMIAMO

$$\log_a m = x$$

PER DEFINIZIONE

$$a^x = m$$

CIOÈ

$$a^{\log_a m} = m$$

ANALOGAMENTE

$$a^{\log_a n} = n$$

DIVIDENDO MEMBRO A MEMBRO QUESTE DUE UGUAGLIANZE SI OTTIENE:

$$\frac{a^{\log_a m}}{a^{\log_a n}} = \frac{m}{n}$$

PER LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$a^{\log_a m - \log_a n} = \frac{m}{n}$$

RITORNANDO INDIETRO DALLA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

$$\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}$$

DA NOTARE CHE

$$\log_a \frac{1}{n} = \log_a 1 - \log_a n = 0 - \log_a n$$

CIOÈ

$$\log_a \frac{1}{n} = -\log_a n$$

ESEMPIO

$$\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

OSSERVAZIONE

$$\log_3\left(\frac{-9}{-3}\right) \neq \log_3(-9) - \log_3(-3)$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

3) IL LOGARITMO DELLA POTENZA DI UN NUMERO POSITIVO È UGUALE AL PRODOTTO DELL'ESPONENTE PER IL LOGARITMO DEL NUMERO.

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b \quad [a>0, a\neq 1, b>0]$$

DIMOSTRAZIONE:

CHIAMIAMO

$$\log_a b = x$$

PER DEFINIZIONE

$$a^x = b$$

CIOÈ

$$a^{\log_a b} = b$$

ELEVANDO TUTTO AD m:

$$\left(a^{\log_a b}\right)^m = b^m$$

$$a^{m \cdot \log_a b} = b^m$$

RITORNANDO INDIETRO DALLA DEFINIZIONE DI LOGARITMO.

$$m \cdot \log_a b = \log_a b^m$$

ESEMPIO:

$$\log_5 (\sqrt{5})^3 = 3 \log_5 \sqrt{5} = 3 \log_5 5^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cancel{\log_5 5}^{1} = \frac{3}{2}$$

OSSERVAZIONE:

$$\log_3 (-3)^4 \neq 4 \cdot \log_3 (-3)$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

ESPRESSIONI RISOLUBILI MEDIANTE LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

1) CALCOLARE

$$\log_2 \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$$

$$= \log_2(2\sqrt[3]{4}) - \log_2\sqrt{2} = \cancel{\log_2 2}^{1} + \log_2\sqrt[3]{4} - \log_2\sqrt{2} =$$

$$= 1 + \log_2(4)^{\frac{1}{3}} - \log_2(2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{3}\cancel{\log_2 4}^{2} - \frac{1}{2}\cancel{\log_2 2}^{1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{6+4-3}{6} = \frac{7}{6}$$

2) CALCOLARE

$$\log_a \sqrt[5]{\frac{a^2\sqrt{a}}{2\sqrt[3]{a}}}$$

$$= \log_a\left(\frac{a^2\sqrt{a}}{2\sqrt[3]{a}}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log_a \frac{a^2\sqrt{a}}{2\sqrt[3]{a}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log_a a^2\sqrt{a} - \log_a 2\sqrt[3]{a}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\log_a a^2 + \log_a(a)^{\frac{1}{2}} - \log_a 2 + \log_a(a)^{\frac{1}{3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2\cancel{\log_a a}^{1} + \frac{1}{2}\cancel{\log_a a}^{1} - \log_a 2 + \frac{1}{3}\cancel{\log_a a}^{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2 + \frac{1}{2} - \log_a 2 + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{12+6-6\log_a 2+2}{6}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{20-6\log_a 2}{6}\right] = \frac{20-6\log_a 2}{30}$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

CAMBIAMENTO DI BASE

SUPPONIAMO DI VOLER ESPRIMERE

$$\log_a b$$

CON $a>0$, $a\neq 1$ E $b>0$, MEDIANTE LOGARITMI IN UNA NUOVA BASE "c", SEMPRE CON $c>0$ –
PONIAMO

$$\log_a b = m$$

DALLA QUALE PER DEFINIZIONE

$$a^m = b$$

VERA QUEST'ULTIMA UGUAGLIANZA, SARÀ VERA ANCHE L'UGUAGLIANZA DEI LOGARITMI IN BASE c ($c>0$) DI ENTRAMBI I MEMBRI, CIOÈ

$$\log_c a^m = \log_c b$$

PER LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI:

$$m \cdot \log_c a = \log_c b$$

CIOÈ

$$m = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

MA COME POSTO ALL'INIZIO, SAPENDO A COSA È UGUALE m, OTTENIAMO:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

OSSERVAZIONE

SE SI SCEGLIE $c=b$, NELLA FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE SI OTTIENE:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\cancel{\log_b b}^{\,1}}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

CIOÈ SCAMBIANDO TRA LORO BASE ED ARGOMENTO DI UN LOGARITMO, SI OTTIENE IL RECIPROCO DEL LOGARITMO DATO.

AD ESEMPIO

$$\log_2 8 \quad E \quad \log_8 2$$

SONO 2 NUMERI, UNO RECIPROCO DELL'ALTRO, INFATTI

$$\log_2 8 = 3 \quad E \quad \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

ESEMPI

1) $$\log_8 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^3} = \frac{7 \cdot \cancel{\log_2 2}^{\,1}}{3 \cdot \cancel{\log_2 2}^{\,1}} = \frac{7}{3}$$

2) $$\log_{\sqrt[5]{2}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \sqrt[5]{2}} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^{\frac{1}{5}}} =$$

$$= \frac{4 \cdot \cancel{\log_2 2}^{\,1}}{\frac{1}{5} \cdot \cancel{\log_2 2}^{\,1}} = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 4 \cdot 5 = 20$$