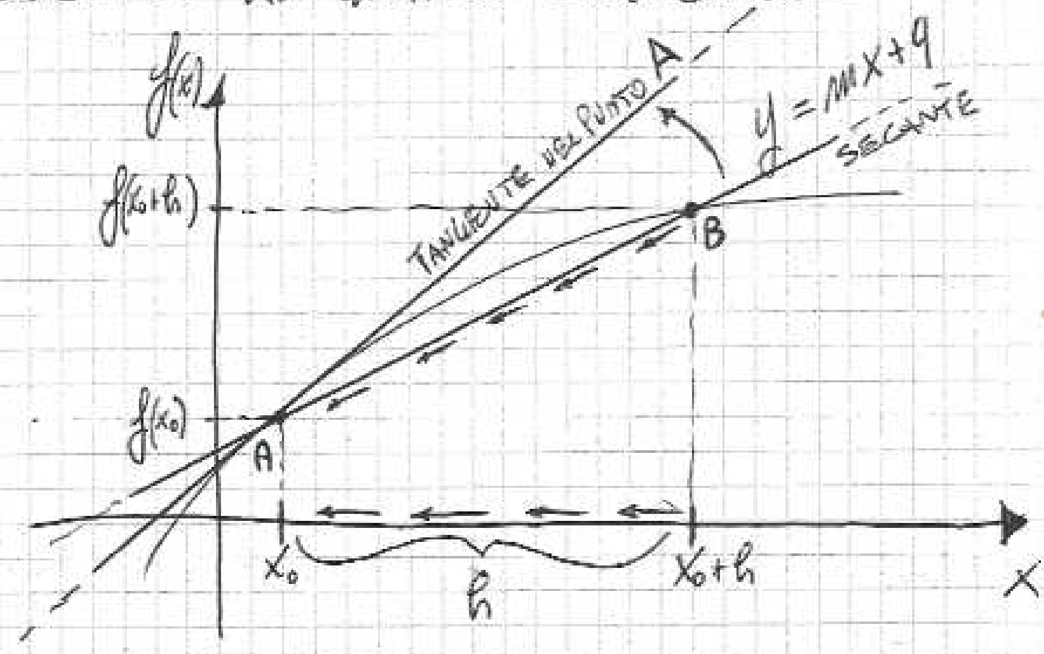
DERIVATA DI UNA FUNZIONE

DEFINIZIONE:

LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO x_0, È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE NEL PUNTO x_0 _

CONSIDERANDO IL GRAFICO SEGUENTE:



LA RETTA È SECANTE LA FUNZIONE NEI PUNTI A e B:

$$A: [x_0; f(x_0)] \qquad B: [(x_0+h); f(x_0+h)]$$

SE IPOTIZZIAMO CHE IL VALORE h DIVENTA SEMPRE PIÙ PICCOLO, CIOÈ $h \to 0$ (TENDE A Ø — —), IL PUNTO B SULLA FUNZIONE TENDERÀ A COINCIDERE CON IL PUNTO A, E LA RETTA DIVENTERÀ TANGENTE ALLA FUNZIONE NEL PUNTO A _

PROVIAMO A CALCOLARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DELLA RETTA $y = mx + q$ SECANTE LA FUNZIONE NEI PUNTI A e B:

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

RICHIAMIAMO LE COORDINATE DEI DUE PUNTI

$$A: [x_0 ; f(x_0)] = [x_A ; y_A]$$

$$B: [x_0+h ; f(x_0+h)] = [x_B ; y_B]$$

SAPPIAMO CHE IN GENERALE IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DELLA RETTA GENERICA PASSANTE PER 2 PUNTI È:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

NEL NOSTRO CASO:

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\cancel{x_0}+h - \cancel{x_0}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

CHE È IL $\boxed{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}$ DELLA FUNZIONE NEL PUNTO x_0.

SE CALCOLIAMO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE PER $h \to 0$ OTTENIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE NEL PUNTO x_0, E CIOÈ LA DERIVATA DELLA FUNZIONE IN x_0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

ESEMPI DI CALCOLO CON L'USO DELLA DEFINIZIONE:

1) CALCOLARE LA DERIVATA DELLA FUNZIONE

$$f(x) = 2x$$

NEL PUNTO $x_0 = 2$

QUINDI:

$$f(x) = 2x$$

$$f(x_0) = 2(x_0) = 2(2) = 4$$

$$f(x_0+h) = 2(x_0+h) = 2(2+h) = 4+2h$$

QUINDI CALCOLANDO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE IN x_0 CON h CHE TENDE A $\emptyset$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{4}+2h-\cancel{4}}{h} = \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$

CIOÈ $f'(x_0) = 2$

2) $f(x) = 3x^2$ e $x_0 = 3$

$$f(x_0) = 3(x_0)^2 = 3(3)^2 = 3(9) = 27$$

$$f(x_0+h) = 3(x_0+h)^2 = 3(3+h)^2 = 3(9+h^2+6h) = 27+3h^2+18h$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{27}+3h^2+18h-\cancel{27}}{h} = \frac{3\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}} =$$

$$= \frac{3(\cancel{h}+6)}{} = 3\cdot 6 = 18 \Rightarrow f'(x_0) = 18$$