DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLUBILI CON I LOGARITMI

GRAZIE AI LOGARITMI, ANALOGAMENTE ALLE EQUAZIONI ESPONENZIALI, È POSSIBILE RISOLVERE QUELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI DIFFICILMENTE RICONDUCIBILI ALLA FORMA CANONICA, NELLE QUALI CIOÈ VI È UNA DISUGUAGLIANZA TRA POTENZE CON BASI DIVERSE, COME AD ESEMPIO:

$$\boxed{a^{f(x)} \geq b^{g(x)}} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{a^{f(x)} \leq b^{g(x)}}$$

MA NELL'IPOTESI CHE:

$$\boxed{a^{f(x)} > 0} \quad \text{E} \quad \boxed{b^{g(x)} > 0}$$

RISULTANO DEFINITI, CON $C>0$ E $C \neq 1$:

$$\boxed{\log_c a^{f(x)}} \quad \text{E} \quad \boxed{\log_c b^{g(x)}}$$

E PER LA "MONOTONIA" DELLA FUNZIONE LOGARITMO, RICORDANDO CHE SE $C>1$ LA FUNZIONE È CRESCENTE MENTRE SE $0<C<1$ LA FUNZIONE È DECRESCENTE, È LECITO SCRIVERE CHE SE VALE:

$$\boxed{a^{f(x)} \geq b^{g(x)}} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{a^{f(x)} \leq b^{g(x)}}$$

ALLORA È EQUIVALENTE SCRIVERE:

$$\boxed{\log_c a^{f(x)} \geq \log_c b^{g(x)}} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{\log_c a^{f(x)} \leq \log_c b^{g(x)}}$$

SE $C>1$ (SI MANTIENE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE)

DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

OPPURE È EQUIVALENTE SCRIVERE

$\boxed{\log_c a^{f(x)} \leq \log_c b^{g(x)}}$ OPPURE $\boxed{\log_c a^{f(x)} \geq \log_c b^{g(x)}}$

SE $0<c<1$ (SI INVERTE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE)

ESEMPI

1) $5^x < 20$

$\log_5 5^x < \log_5 20$

$x \cancel{\log_5 5} < \log_5 20$

$\boxed{x < \log_5 20}$

2) $2^x < 4 \cdot 3^x$

$\ln 2^x < \ln(4 \cdot 3^x)$

$x \ln 2 < \ln 4 + \ln 3^x$

$x \ln 2 < \ln 4 + x \ln 3$

$x \ln 2 - x \ln 3 < \ln 4$

$x(\ln 2 - \ln 3) < \ln 4$

QUESTA QUANTITÀ È SICURAMENTE NEGATIVA ESSENDO IL LOGARITMO NATURALE UNA FUNZIONE CRESCENTE QUINDI MOLTIPLICHIAMO TUTTO PER -1 COSÌ

$x(\ln 3 - \ln 2) > -\ln 4$

$\boxed{x > \frac{-\ln 4}{\ln 3 - \ln 2} \simeq -3{,}419}$

DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

3) $2^x+5\cdot 3^x>2^{x+1}$

PRIMA DI UTILIZZARE I LOGARITMI BISOGNA TRASFORMARE ENTRAMBI I MEMBRI IN PRODOTTI DI POTENZE:

$$2^x+5\cdot 3^x>2^{x+1}$$
$$5\cdot 3^x>2^{x+1}-2^x$$
$$5\cdot 3^x>2^x(2-1)$$
$$5\cdot 3^x>2^x$$

APPLICHIAMO QUINDI I LOGARITMI:

$$\ln(5\cdot 3^x)>\ln 2^x$$
$$\ln 5+\ln 3^x>\ln 2^x$$
$$\ln 5+x\ln 3>x\ln 2$$
$$x\ln 3-x\ln 2>-\ln 5$$
$$x(\ln 3-\ln 2)>-\ln 5$$
$$\boxed{x>\frac{-\ln 5}{\ln 3-\ln 2}\simeq -3,969}$$

4) $3^{2x+1}-3^{2+x}+6\leq 0$

$$3\cdot 3^{2x}-3^2\cdot 3^x+6\leq 0$$

PONIAMO $3^x=z \Rightarrow 3^{2x}=z^2$ COSÌ

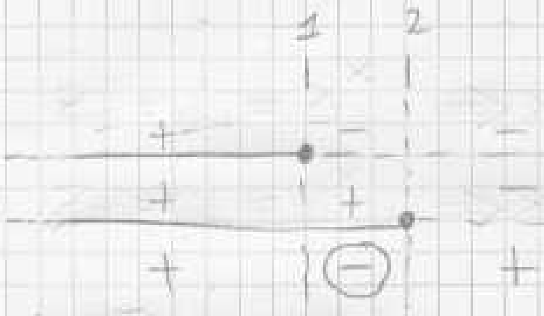
$$3z^2-9z+6\leq 0$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$3z^2-9z+6=0$$

$\Delta = 81-(4)(3)(6) = 81-72 = 9$

$$z_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm 3}{6} = \begin{cases} \frac{9-3}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{9+3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$$



$1 \leq z \leq 2$

CIOÈ

$1 \leq 3^x \leq 2$

DALLA QUALE

$$\cancel{\log_3 1}^{\,0} \leq \log_3 3^x \leq \log_3 2 \Rightarrow \boxed{0 \leq x \leq \log_3 2}$$

$\boxed{5)}$ $$\frac{2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2}{1 - 3^x} > 0$$

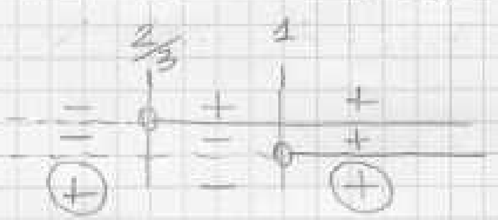
DISEQUAZIONE FRATTA QUINDI STUDIAMO NUMERATORE E DENOMINATORE

N) $2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2 > 0$

$3 \cdot 2^x \, 2^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^{2x} - 5 \, 2^x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2^x \\ z^2 = 2^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow 3z^2 - 5z + 2 > 0$

$\Delta = 1$ $\qquad z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ $z < \frac{2}{3} \quad \vee \quad z > 1$

CIOÈ

$2^x < \frac{2}{3} \quad \vee \quad 2^x > 1$

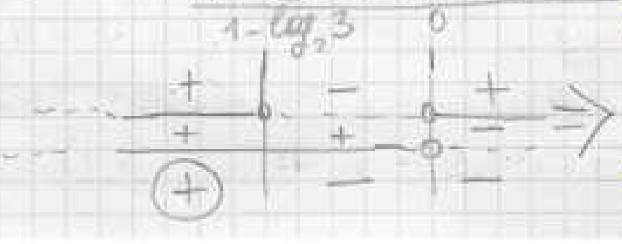
QUINDI:

$x < \cancel{\log_2 2}^{\,1} - \log_2 3 \quad \vee \quad x > 0$

D) $1 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 1$

$\Rightarrow x < 0$

IN DEFINITIVA:



$\Rightarrow \boxed{x < 1 - \log_2 3}$