DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

SI DICONO DISEQUAZIONI ESPONENZIALI TUTTE LE DISEQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA FIGURA NELL'ESPONENTE DI QUALCHE POTENZA.

SI CHIAMA $\boxed{\text{FORMA CANONICA}}$ DELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{a^{f(x)} \geq a^{g(x)}} \quad \boxed{\left(\text{OPPURE } a^{f(x)} \leq a^{g(x)}\right)}$$

IN CUI NATURALMENTE LA DISEGUAGLIANZA PUÒ ANCHE ESSERE STRETTA (SENZA L'UGUALE) E DOVE $a>0$ E $a \neq 1$

ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN "X", CHE È UN NUMERO REALE QUALSIASI.

RICORDANDO CHE LA FUNZIONE ESPONENZIALE È UNA FUNZIONE MONOTÒNA, CIOÈ SEMPRE CRESCENTE O DECRESCENTE, ALLORA SE $a>1$ (CRESCENTE):

$$\boxed{a^{f(x)} \geq a^{g(x)}} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{a^{f(x)} \leq a^{g(x)}}$$

È VERA SE E SOLO SE

$$\boxed{f(x) \geq g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{f(x) \leq g(x)}$$

MENTRE SE $0<a<1$ (DECRESCENTE):

$$\boxed{a^{f(x)} \geq a^{g(x)}} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{a^{f(x)} \leq a^{g(x)}}$$

È VERA SE E SOLO SE

$$\boxed{f(x) \leq g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{f(x) \geq g(x)}$$

CIOÈ IN QUESTO CASO, CON GLI ESPONENTI SI INVERTE IL SENSO DELLA DISEGUAGLIANZA.

ESEMPI

4

1) $5^x < 25$

$5^x < 5^2$

POICHÉ $5 > 1$ $(a > 1)$ ALLORA SI MANTIENE IL VERSO, QUINDI:

$\boxed{x < 2}$

2) $\frac{1}{3^x} \geq 3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

POICHÉ $0 < \frac{1}{3} < 1$ $(0 < a < 1)$, ALLORA:

$\boxed{x \leq -1}$

3) $2^x \leq \frac{3^{x+3}}{8}$

$8 \cdot 2^x \leq 3^{x+3}$

$2^3 \cdot 2^x \leq 3^{x+3}$

$2^{x+3} \leq 3^{x+3}$

$\frac{2^{x+3}}{3^{x+3}} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$

PER LE REGOLE SULLE POTENZE: QUALSIASI POTENZA CON ESPONENTE PARI A ZERO E' SEMPRE UGUALE AD UNO

$\Rightarrow x + 3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -3}$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

4) $4^{\frac{x}{2}+1} - 2^{x-1} < 56$

PER LE REGOLE DELLE POTENZE: PRODOTTO E DIVISIONE TRA POTENZE CON UGUALE BASE

$2^{2\left(\frac{x}{2}+1\right)} - 2^{x-1} < 56$

$2^{x+2} - 2^{x-1} < 56 \Rightarrow 2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^{-1} < 56$

$\Rightarrow 2^x\left(2^2 - \frac{1}{2}\right) < 56$

$2^x\left(\frac{7}{2}\right) < 56$

$2^x < 56 \cdot \frac{2}{7}$

$2^x < 16 \Rightarrow 2^x < 2^4 \Rightarrow \boxed{x < 4}$

5) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

PERCHE'

$(z)^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$

$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

PONIAMO $2^x = z$ E $2^{2x} = z^2$ COSÌ

$z^2 - 10z + 16 < 0$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA: EQ. DI II° GRADO

$z^2 - 10z + 16 = 0 \quad \Delta = 100 - 64 = 36 \quad z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = 8 \end{cases}$

OTTENENDO COME SOLUZIONI IN Z:

$2 < z < 8$

RICORDANDO CHE $z = 2^x$, ALLORA

$2 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^3$

E CIOÈ:

$\boxed{1 < x < 3}$

SI MANTENGONO I VERSI PERCHÉ $2 > 1$ $(a > 1)$!

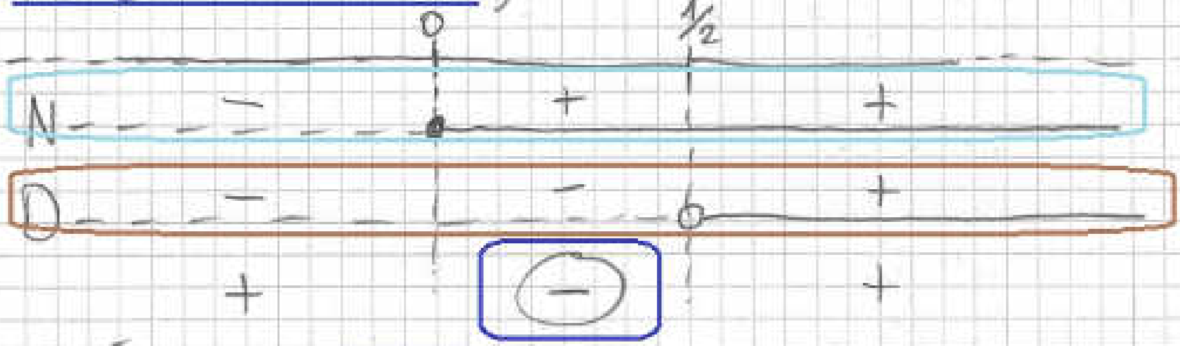
6) $$\frac{2^x-1}{9^x-3}\le 0$$

POICHÉ È UNA DISEQUAZIONE FRAZIONARIA, STUDIAMO SEPARATAMENTE NUMERATORE E DENOMINATORE:

$$\boxed{N\ge 0} \Rightarrow 2^x-1\ge 0 \Rightarrow 2^x\ge 1 \Rightarrow 2^x\ge 2^0 \Rightarrow \boxed{x\ge 0}$$

$$\boxed{D>0} \Rightarrow 9^x-3>0 \Rightarrow 3^{2x}>3^1 \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow \boxed{x>\frac{1}{2}}$$

GRAFICAMENTE PRENDIAMO LE SOLUZIONI CHE RENDONO NEGATIVA LA NOSTRA FRAZIONE (PERCHÉ VIENE CHIESTO ≤0!):



COSÌ:

$$\boxed{0\le x<\frac{1}{2}}$$