DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

UNA DISEQUAZIONE PARAMETRICA È UNA DISEQUAZIONE NELLA QUALE OLTRE ALL'INCOGNITA COMPARE UNO O PIÙ PARAMETRI.
PER LA SUA RISOLUZIONE, OCCORRE AFFRONTARE UNA DISCUSSIONE PARAMETRICA PER CAPIRE PER QUALI VALORI DEL O DEI PARAMETRI ESSA AMMETTE SOLUZIONI, ESPLICITANDO LE EVENTUALI SOLUZIONI IN FUNZIONE DEL O DEI PARAMETRI.
NATURALMENTE IL DISCORSO VALE ANCHE PER LE EQUAZIONI PARAMETRICHE.
NON ESSENDO QUINDI, UN TIPO DI DISEQUAZIONE ELEMENTARE, NON ESISTE UN PROCEDIMENTO UNIVERSALE PER LA SUA RISOLUZIONE.
PER MEGLIO COMPRENDERE PARTIAMO CON UN SEMPLICE ESEMPIO DI DISEQUAZIONE PARAMETRICA DI II° GRADO.
VOGLIAMO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{x^2+9kx+8k^2>0 \quad \text{CON } k\in\mathbb{R}}$$

PER PRIMA COSA CALCOLIAMO IL DELTA DELLA SUA EQUAZIONE ASSOCIATA, CIOÈ:

$$\boxed{\Delta=b^2-4\cdot ac=(9k)^2-4(1)\cdot(8k^2)=81k^2-32k^2=49k^2}$$

POSSIAMO SUBITO VERIFICARE CHE:

$$\boxed{\Delta\geq 0 \Rightarrow 49k^2\geq 0 \Rightarrow k^2\geq 0 \quad \forall k\in\mathbb{R}}$$

CIOÈ IL DELTA È SEMPRE POSITIVO O AL MASSIMO UGUALE A Ø (PER K=0), QUINDI L'EQUAZIONE ASSOCIATA AMMETTERÀ 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE OPPURE

DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

5

2 SOLUZIONI COINCIDENTI (PER $k=0$).

PASSIAMO QUINDI ALL'APPLICAZIONE DELLA FORMULA DI RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-9\pm\sqrt{49k^2}}{2\cdot 1}=\frac{-9\pm|7k|}{2}}$$

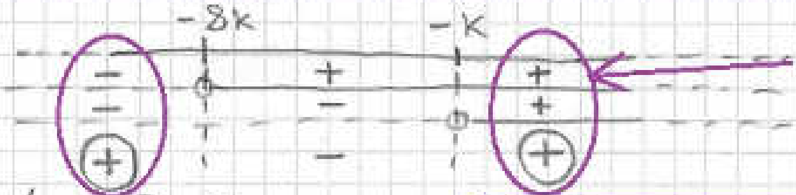
A QUESTO PUNTO PROCEDIAMO CON LA DISCUSSIONE PARAMETRICA:

1) SE $k>0$

$$\boxed{x_{1,2}}=\frac{-9k\pm 7k}{2}=\begin{cases}\dfrac{-9k-7k}{2}=\dfrac{-16}{2}k=\boxed{-8k}\\[2ex]\dfrac{-9k+7k}{2}=\dfrac{-2}{2}k=\boxed{-k}\end{cases}$$

VISTO CHE K È POSITIVO $-8k$ SARÀ PIÙ PICCOLO DI $-k$

COSÌ:

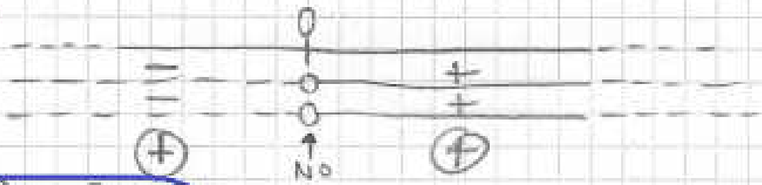


perchè la disequazione di partenza è con maggiore di zero (>0)

CIOÈ $\forall x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\boxed{x<-8k \cup x>-k}$

2) SE $k=0$

$$\boxed{x_{1,2}=0}$$



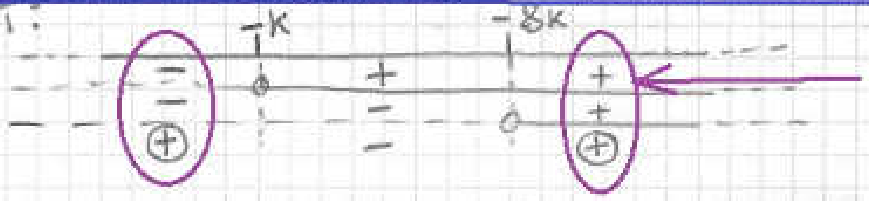
CIOÈ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}}$

3) SE $k<0$

$$\boxed{x_{1,2}}=\frac{-9k\pm(-7k)}{2}=\begin{cases}\dfrac{-9k-7k}{2}=\dfrac{-16k}{2}=\boxed{-8k}\\[2ex]\dfrac{-9k+7k}{2}=-\dfrac{2}{2}k=\boxed{-k}\end{cases}$$

VISTO CHE K È NEGATIVO $-k$ SARÀ PIÙ PICCOLO DI $-8k$

COSÌ:



perchè la disequazione di partenza è con maggiore di zero (>0)

DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

CIOÈ $\forall x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\boxed{x < -k \cup x > -8k}$

IN DEFINITIVA RIASSUMENDO IL TUTTO, DATA LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{x^2 + 9kx + 8k^2 > 0 \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}}$$

LE SOLUZIONI SONO:

$$\boxed{\begin{cases} k > 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } x < -8k \cup x > -k \\ k = 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} - \{\emptyset\} \\ k < 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } x < -k \cup x > -8k \end{cases}}$$

CONSIDERIAMO ADESSO UNA DISEQUAZIONE ESPONENZIALE PARAMETRICA:

$$\boxed{2^x > 3k - 1 \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}}$$

RIPRENDENDO LA FORMA CANONICA DELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI (CON IL VERSO DI MAGGIORE), CIOÈ:

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)}}$$

NEL NOSTRO ESEMPIO, AL PRIMO MEMBRO ABBIAMO LA CLASSICA FUNZIONE ESPONENZIALE, MENTRE AL SECONDO MEMBRO ABBIAMO UNA ESPRESSIONE IN K NUMERO REALE, QUINDI SIAMO PER METÀ IN FORMA CANONICA (PRIMO MEMBRO).

PROCEDIAMO ALLORA CON LA DISCUSSIONE PARAMETRICA SUPPONENDO CHE IL SECONDO MEMBRO SIA UNA QUANTITÀ NON POSITIVA, CIOÈ:

$$\boxed{3k - 1 \leq 0}$$

DA CUI: $\boxed{3k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3}}$

SAPENDO CHE LA FUNZIONE ESPONENZIALE RESTITUISCE SEMPRE UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (>0), VEDI CODOMINIO DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE, ALLORA IL PRIMO MEMBRO SARÀ SEMPRE MAGGIORE DEL SECONDO CHE ABBIAMO SUPPOSTO ≤ 0, COSÌ LA DISEQUAZIONE AMMETTERÀ COME SOLUZIONE QUALSIASI X REALE (SE $k \leq \frac{1}{3}$).

DIVERSAMENTE SE:

$$\boxed{3k-1>0 \Rightarrow 3k>1 \Rightarrow k>\frac{1}{3}}$$

IL SECONDO MEMBRO SARÀ SEMPRE POSITIVO E POSSIAMO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE MEDIANTE L'APPLICAZIONE DEI LOGARITMI, CIOÈ RISCRIVENDOLA COME:

$$\boxed{\log_2 2^x > \log_2 (3k-1)}$$

CIOÈ:

$$\boxed{\begin{gathered} x \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} > \log_2 (3k-1) \\ x > \log_2 (3k-1) \end{gathered}}$$

DOVE IL LOGARITMO È SICURAMENTE DEFINITO PERCHÉ $3k-1>0$

IN DEFINITIVA LE SOLUZIONI SONO:

$$\boxed{\begin{cases} k>\frac{1}{3} & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } x > \log_2(3k-1) \\ k \leq \frac{1}{3} & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \end{cases}}$$