DISEQUAZIONI LOG. PARAMETRICHE

COME PER LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI PARAMETRICHE, ANCHE PER LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE PARAMETRICHE OCCORRE AFFRONTARE UNA DISCUSSIONE PER VEDERE PER QUALI VALORI DEL O DEI PARAMETRI ESSA AMMETTE SOLUZIONI.

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI.

1) RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

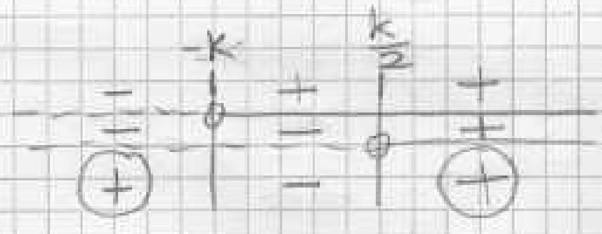
$$\log_2 \frac{x+k}{2x-k} > 0 \qquad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

PROCEDIAMO CON LA DISCUSSIONE PARAMETRICA:

CASO $k>0$

C.A.

$$\frac{x+k}{2x-k} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x+k>0 \\ 2x-k>0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x>-k \\ x>\frac{k}{2} \end{matrix}$$



$$\Rightarrow x<-k \vee x>\frac{k}{2}$$

PASSIAMO ORA ALLA DISEQUAZIONE: 1

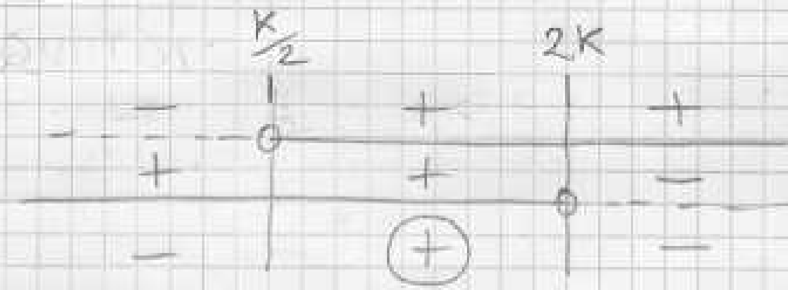
$$\log_2 \frac{x+k}{2x-k} > 0 \Rightarrow 2^{\log_2 \frac{x+k}{2x-k}} > 2^0$$

$$\frac{x+k}{2x-k} > 1$$

$$\frac{x+k}{2x-k} - 1 > 0$$

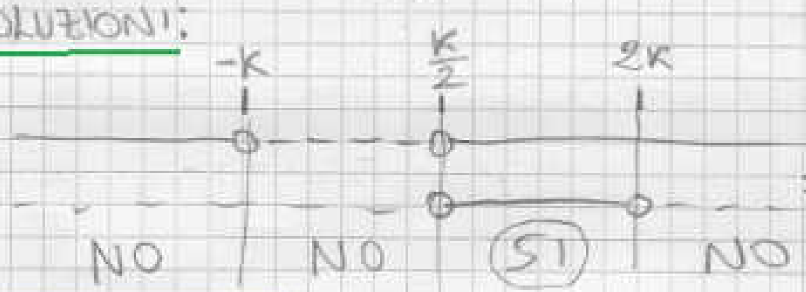
$$\frac{x+k-2x+k}{2x-k}>0$$

$$\frac{-x+2k}{2x-k}>0 \Rightarrow \begin{matrix} -x+2k>0 \\ 2x-k>0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x<2k \\ x>\frac{k}{2} \end{matrix}$$



$$\Rightarrow \frac{k}{2}<x<2k$$

SOLUZIONI:



$$\Rightarrow \boxed{\frac{k}{2}<x<2k}$$

$\boxed{\text{CASO } k=0}$

SOSTITUENDO NELLA DISEQUAZIONE SI OTTIENE:

$$\log_2 \frac{x+0}{2x-0}>0 \Rightarrow \log_2 \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}}>0$$

$$\log_2 \frac{1}{2}>0 \qquad \boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$$

PERCHÉ

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1\cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = -1\cdot 1 = -1$$

E

$-1>0$ MAI

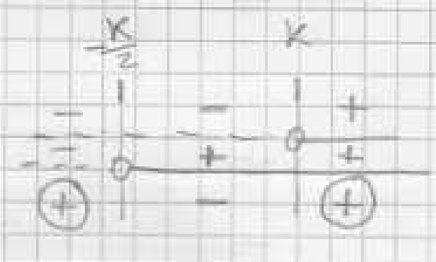
$\boxed{\text{CASO } k<0}$

SOSTITUENDO NELLA DISEQUAZIONE:

$$\log_2 \frac{x-k}{2x+k} > 0$$

C.A.

$$\frac{x-k}{2x+k}>0 \Rightarrow \begin{cases} x-k>0 \\ 2x+k>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>k \\ x>-\frac{k}{2} \end{cases}$$

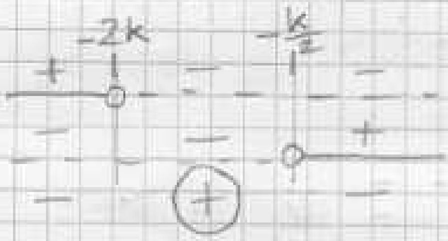


$$\Rightarrow x<-\frac{k}{2} \vee x>k$$

PASSO ALLA DISEQUAZIONE

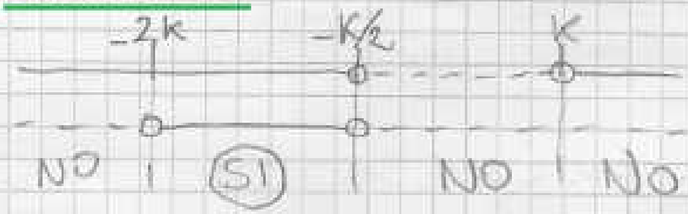
$$\frac{x-k}{2x+k}>1 \Rightarrow \frac{x-k-2x-k}{2x+k}>0 \Rightarrow \frac{-x-2k}{2x+k}>0 \Rightarrow \begin{cases} -x-2k>0 \\ 2x+k>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-2k \\ x>-\frac{k}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow -2k<x<-\frac{k}{2}$$

SOLUZIONI:



$$\Rightarrow \boxed{-2k<x<-\frac{k}{2}}$$

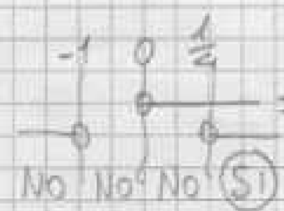
IN CONCLUSIONE LE SOLUZIONI SONO:

$$\boxed{\begin{cases} k>0 & \text{OGNI } x\in\mathbb{R} \text{ TALE CHE } \frac{k}{2}<x<2k \\ k=0 & \text{IMPOSSIBILE} \\ k<0 & \text{OGNI } x\in\mathbb{R} \text{ TALE CHE } -2k<x<-\frac{k}{2} \end{cases}}$$

2) RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\log_k (4x^2+3x-1) - \log_k x > 0$$

C.A. $\begin{cases} x>0 \\ 4x^2+3x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<-1 \vee x>\frac{1}{4} \end{cases}$



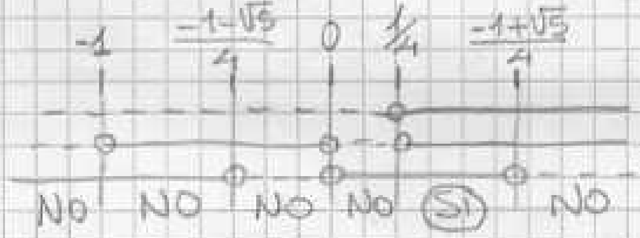
$\Rightarrow \boxed{x>\frac{1}{4}}$

VISTO CHE IL PARAMETRO È LA BASE DEL LOGARITMO ALLORA SI DISCUTONO SOLO 2 CASI:

$\boxed{\text{CASO } 0<k<1}$

$$\log_k \frac{4x^2+3x-1}{x} > 0$$

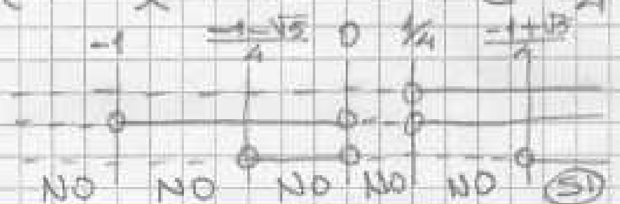
$$\begin{cases} \frac{4x^2+3x-1}{x} > 0 \\ \frac{4x^2+3x-1}{x} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+3x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0 \vee x>\frac{1}{4} \\ x<\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \vee 0<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} < x \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

$\boxed{\text{CASO } k>1}$

$$\begin{cases} \frac{4x^2+3x-1}{x} > 0 \\ \frac{4x^2+3x-1}{x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<0 \vee x>\frac{1}{4} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}<x<0 \vee x>\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{x>\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

IN CONCLUSIONE, LE SOLUZIONI SONO:

$$\begin{cases} 0<k<1 & \text{OGNI } x\in\mathbb{R} \text{ TALE CHE } \frac{1}{4}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ k>1 & \text{OGNI } x\in\mathbb{R} \text{ TALE CHE } x>\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$