DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

DEFINIZIONE DI DISEQUAZIONE

(1)

SI DEFINISCE DISEQUAZIONE LA DISUGUAGLIANZA TRA DUE ESPRESSIONI NELLE QUALI IN ALMENO UNA COMPARE (ALMENO) UNA INCOGNITA, VALIDA SOLO PER ALCUNI INTERVALLI DI VALORI DELLA (O DELLE) INCOGNITE PRESENTI.

CONSIDERATE DUE ESPRESSIONI A E B, UTILIZZANDO I SIMBOLI DI > (MAGGIORE) E < (MINORE) SI CHIEDE DI STABILIRE PER QUALI VALORI DELLA INCOGNITA (O DELLE INCOGNITE...) SI VERIFICA CHE:

$A > B$	L'ESPRESSIONE A È MAGGIORE DELL'ESPRESSIONE B
$A < B$	L'ESPRESSIONE A È MINORE DELL'ESPRESSIONE B

O ANCHE:

$A \geq B$	L'ESPRESSIONE A È MAGGIORE O AL MASSIMO UGUALE DELL'ESPRESSIONE B
$A \leq B$	L'ESPRESSIONE A È MINORE O AL MASSIMO UGULE DELL'ESPRESSIONE B

COME PER LE EQUAZIONI, ANCHE PER LE DISEQUAZIONI SI PARLA DI 1° MEMBRO, 2° MEMBRO, INCOGNITA (O INCOGNITE...), COEFFICIENTI, TERMINI NOTI E GRADO (L'ESPONENTE MASSIMO DELL'INCOGNITA).

ANCHE PER LE DISEQUAZIONI VALGONO GLI STESSI PRINCIPI DI EQUIVALENZA TRATTATI NELLE EQUAZIONI CHE CON LE LORO REGOLE CI PERMETTONO DI PASSARE

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

DA UNA DISEQUAZIONE DI PARTENZA AD UN'ALTRA AD ESSA EQUIVALENTE, CIOÈ VALIDA PER LO STESSO O GLI STESSI INTERVALLI DI VALORI DELLA (O DELLE) INCOGNITE (STESSE SOLUZIONI) _

L'UNICA ECCEZIONE STA NEL 2° PRINCIPIO DI EQUIVALENZA:

- MOLTIPLICANDO/DIVIDENDO 1° E 2° MEMBRO PER UNA QUANTITÀ NEGATIVA O CAMBIANDO DI SEGNO TUTTI I TERMINI

SI INVERTE

IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE

(SE È MAGGIORE DIVENTA MINORE E VICEVERSA)

CIOÈ:

$$-5x \leq 1 \Rightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{1}{-5} \Rightarrow x \geq -\frac{1}{5}$$

$$-2x-2>+6 \Rightarrow +2x+2<-6$$

PER QUANTO RIGUARDA LE SOLUZIONI, MENTRE NELLE EQUAZIONI LA SOLUZIONE SE ESISTE È UNICA (O UNICHE A SECONDA DEL GRADO..), NELLE DISEQUAZIONI LA SOLUZIONE PUÒ ESSERE:

i) UN INSIEME DI VALORI (INFINITI NUMERI REALI)

ii) NESSUNA (INSIEME VUOTO)

DISEQUAZIONI RIDOTTE IN FORMA NORMALE

UNA DISEQUAZIONE È IN FORMA NORMALE QUANDO:

- AL PRIMO MEMBRO C'È UN'ESPRESSIONE CONTENENTE L'INCOGNITA, AD ESEMPIO IN GENERALE $P(x)$
- AL SECONDO MEMBRO COMPARE SOLO LO Ø (ZERO)

ESEMPI:

$\boxed{P(x)>0}$ $\boxed{P(x)\geq 0}$

$\boxed{P(x)<0}$ $\boxed{P(x)\leq 0}$

DISEQUAZIONI DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA

PER RISOLVERE UNA DISEQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA SI SFRUTTANO LE REGOLE DEI PRINCIPI DI EQUIVALENZA PER RIDURLA IN FORMA NORMALE.

COME PER LE EQUAZIONI NELLO SVOLGIMENTO SI RISPETTA L'ORDINE DI CALCOLO PER LE PARENTESI E PER LE OPERAZIONI.

ALLA FINE SI RAPPRESENTA GRAFICAMENTE L'INSIEME DEI VALORI CHE RAPPRESENTANO LA SOLUZIONE.

ESEMPI:

1) $6(x+2)+3\leq 18$

1 SI TOGLIE LA PARENTESI TONDA SVOLGENDO LA MOLTIPLICAZIONE

$6x+12+3\leq 18$

2 REGOLA DEL TRASPORTO

$6x\leq -12-3+18$

3 SOMMA

$6x\leq +3$

4 SI DIVIDE ENTRAMBI I MEMBRI PER 6

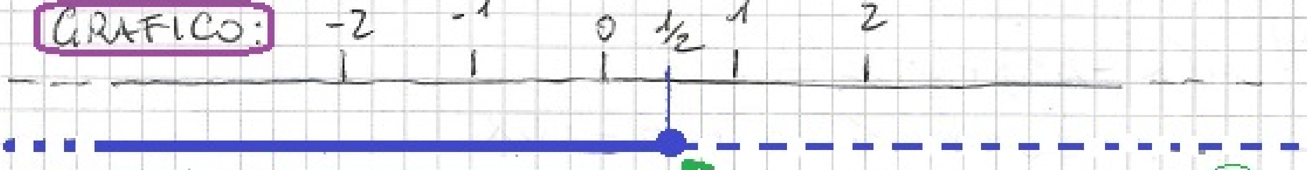
$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}\leq\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}}$

SI SEMPLIFICA

$\boxed{x\leq\frac{1}{2}}$

SOLUZIONE

GRAFICO:



IL VERSO $\leq$ È COME UNA FRECCIA CHE CI INDICA CHE I VALORI DA CONSIDERARE SONO QUELLI A SINISTRA DI $\frac{1}{2}$

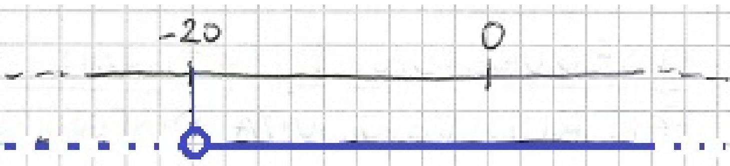
LA DISEQUAZIONE È $\leq$ (MINORE O UGUALE) QUINDI IL VALORE $\frac{1}{2}$ È COMPRESO (ALTRIMENTI SI USA IL PALLINO VUOTO -o-)

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

2) $8x-5x>2x-20$

$8x-5x-2x>-20$

$\boxed{x>-20}$



3) $\dfrac{x+2}{2}-2x\geq\dfrac{4x+3}{3}-x$

$\dfrac{3(x+2)-12x}{6}\geq\dfrac{2(4x+3)-6x}{6}$ m.c.m. DEI DENOMINATORI

$(6)\cdot\dfrac{3(x+2)-12x}{\cancel{6}}\geq\dfrac{2(4x+3)-6x}{\cancel{6}}\cdot(6)$ MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER 6

$3(x+2)-12x\geq2(4x+3)-6x$

$3x+6-12x\geq8x+6-6x$

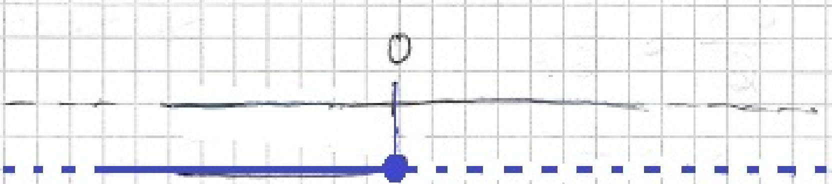
$3x-12x-8x+6x\geq\cancel{+6}\cancel{-6}$

$-11x\geq0$ SI CAMBIA DI SEGNO E SI INVERTE IL VERSO

$11x\leq0$

$\dfrac{\cancel{11}x}{\cancel{11}}\leq\dfrac{\cancel{0}}{\cancel{11}}$

$\boxed{x\leq0}$



4) $4(x^2-49)+61\geq(2x-5)^2$

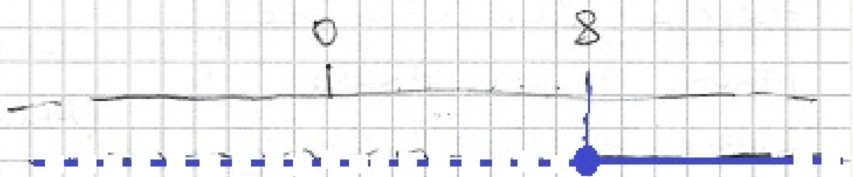
$\cancel{4x^2}-196+61\geq\cancel{4x^2}+25-20x$

$+20x\geq196-61+25$

$20x\geq160$

$\dfrac{\cancel{20}x}{\cancel{20}}\geq\dfrac{\cancel{160}^{\,8}}{\cancel{20}}$

$\boxed{x\geq8}$



2

DISEQUAZIONI FRATTE (O FRAZIONARIE)

COME LE EQUAZIONI LE DISEQUAZIONI FRAZIONARIE SONO QUELLE NELLE QUALI L'INCOGNITA COMPARE AL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE.

OGNI DISEQUAZIONE FRAZIONARIA È SEMPRE RICONDUCIBILE AL RAPPORTO TRA DUE POLINOMI DEL TIPO:

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)} > 0} \qquad \boxed{\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0}$$

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)} < 0} \qquad \boxed{\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0}$$

DOVE:

$\boxed{N(\cdot)}$ NUMERATORE DELLA FRAZIONE

$\boxed{D(\cdot)}$ DENOMINATORE DELLA FRAZIONE

I PASSI DA SEGUIRE PER LA RISOLUZIONE DI QUESTO TIPO DI DISEQUAZIONI SONO:

1) ESCLUDERE DALLE POSSIBILI SOLUZIONI QUEI VALORI CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE, CIOÈ DETERMINARE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA DELLA FRAZIONE (COME PER LE EQUAZIONI...)

2) STUDIARE SEPARATAMENTE IL SEGNO DEL NUMERATORE E DEL DENOMINATORE E SUCCESSIVAMENTE IL SEGNO DELLA FRAZIONE, E CIOÈ:

a) VERIFICARE QUANDO IL NUMERATORE È POSITIVO

b) VERIFICARE QUANDO IL DENOMINATORE È POSITIVO

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

c) VERIFICARE QUANDO LA DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE È POSITIVA O NEGATIVA E PRENDERE GLI INTERVALLI COME SOLUZIONI A SECONDA DEL VERSO DELLA DISEQUAZIONE, CIOÈ:

- $\boxed{\text{SE } \frac{N(x)}{D(x)}>0 \left(\frac{N(x)}{D(x)}\geq 0\right)}$ SI PRENDONO GLI INTERVALLI POSITIVI, PERCHÉ CI VIENE CHIESTO QUANDO TALE RAPPORTO È POSITIVO

- $\boxed{\text{SE } \frac{N(x)}{D(x)}<0 \left(\frac{N(x)}{D(x)}\leq 0\right)}$ SI PRENDONO GLI INTERVALLI NEGATIVI, PERCHÉ CI VIENE CHIESTO QUANDO TALE RAPPORTO È NEGATIVO

RICORDANDO SEMPRE CHE:

$\boxed{\frac{+}{+}=+ \quad \text{o} \quad \frac{-}{-}=+}$ CIOÈ POSITIVO (>0)

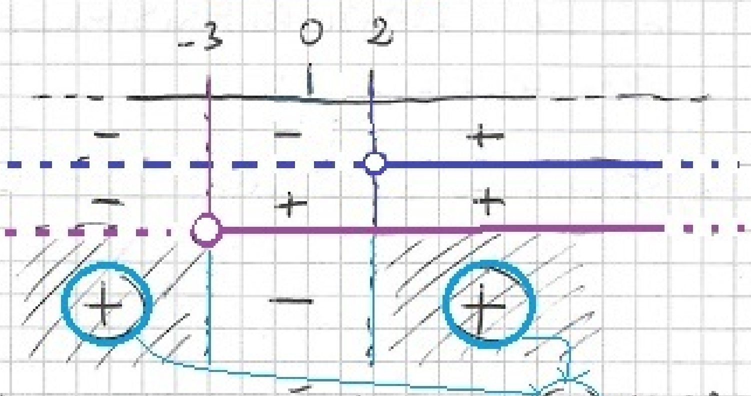
$\boxed{\frac{+}{-}=- \quad \text{o} \quad \frac{-}{+}=-}$ CIOÈ NEGATIVO (<0)

ESEMPI:

1) $\frac{x-2}{x+3}>0$

CONDIZIONI DI ESISTENZA:

$x+3\neq 0 \Rightarrow \boxed{x\neq -3}$



N) $x-2>0$ $\boxed{x>2}$

D) $x+3>0$ $\boxed{x>-3}$

$\boxed{\text{RAPPORTO} \quad \frac{N}{D}}$

VISTO CHE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE È MAGGIORE (>) ALLORA SI PRENDONO GLI INTERVALLI POSITIVI, COSÌ

$\boxed{\text{SOLUZIONI} \quad x<-3 \cup x>2}$

2) $\dfrac{x}{x-2} > 5$ C.E.: $x-2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 2}$

RICONDUCIAMO LA DISEQUAZIONE AD UN RAPPORTO TRA DUE POLINOMI:

$$\frac{x}{x-2} - 5 > 0$$

$$\frac{x-5(x-2)}{x-2} > 0$$

$$\frac{x-5x+10}{x-2} > 0$$

$$\boxed{\frac{-4x+10}{x-2} > 0}$$

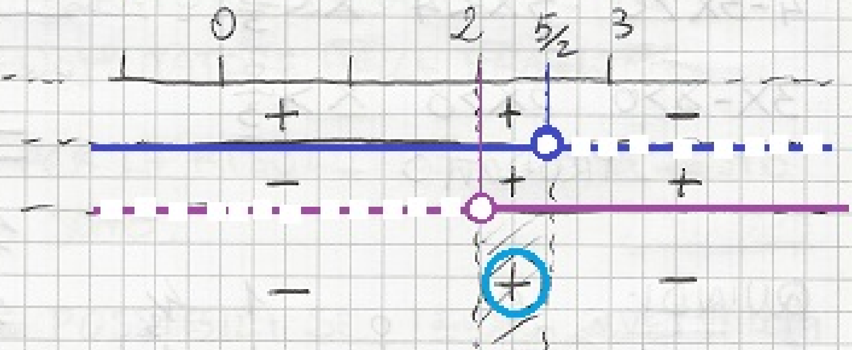
ADESSO STUDIAMO IL SEGNO DI QUESTO RAPPORTO

N) $-4x+10 > 0$

$4x < 10$ $x < \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

D) $x-2 > 0$ $\boxed{x > 2}$

RAPPORTO $\frac{N}{D}$



SOLUZIONI $2 < x < \frac{5}{2}$

3) $\dfrac{(x-3)(2x-5)}{(4-3x)(3x-8)} \leq 0$

CONDIZIONI DI ESISTENZA:

- $4-3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 4 \Rightarrow \boxed{x \neq \frac{4}{3}}$
- $3x-8 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 8 \Rightarrow \boxed{x \neq \frac{8}{3}}$

N) $(x-3)(2x-5) \geq 0$

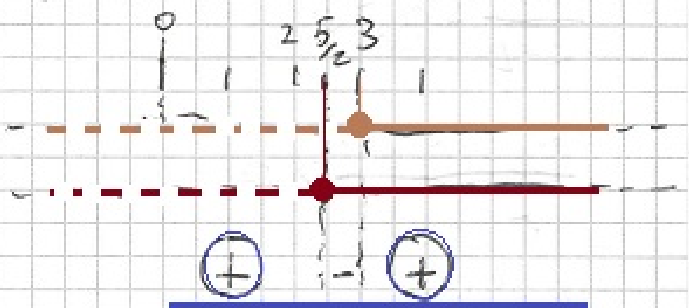
SI PUÒ PROCEDERE IN 2 MODI, SI SVOLGE LA MOLTIPLICAZIONE OTTENENDO PERÒ UNA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO, OPPURE SI STUDIA IL SEGNO DEI SINGOLI FATTORI DEL PRODOTTO, CHE È QUELLO CHE FAREMO QUI.

QUINDI:

$(x-3) \geq 0 \qquad \boxed{x \geq 3}$

$(2x-5) \geq 0 \qquad \boxed{x \geq \frac{5}{2}}$

PRODOTTO



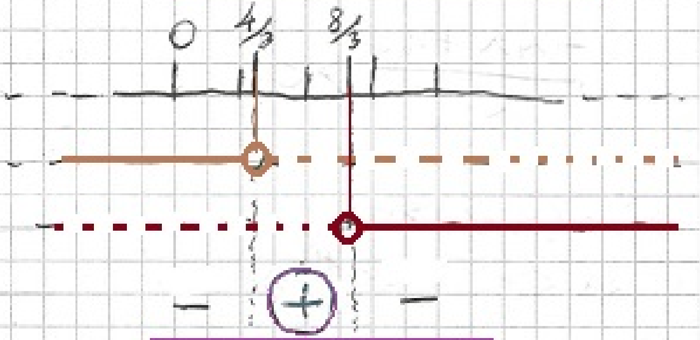
$$\boxed{x \leq \frac{5}{2} \cup x \geq 3}$$

D) $(4-3x)(3x-8)>0$

$4-3x>0 \quad 3x<4 \quad \boxed{x<\frac{4}{3}}$

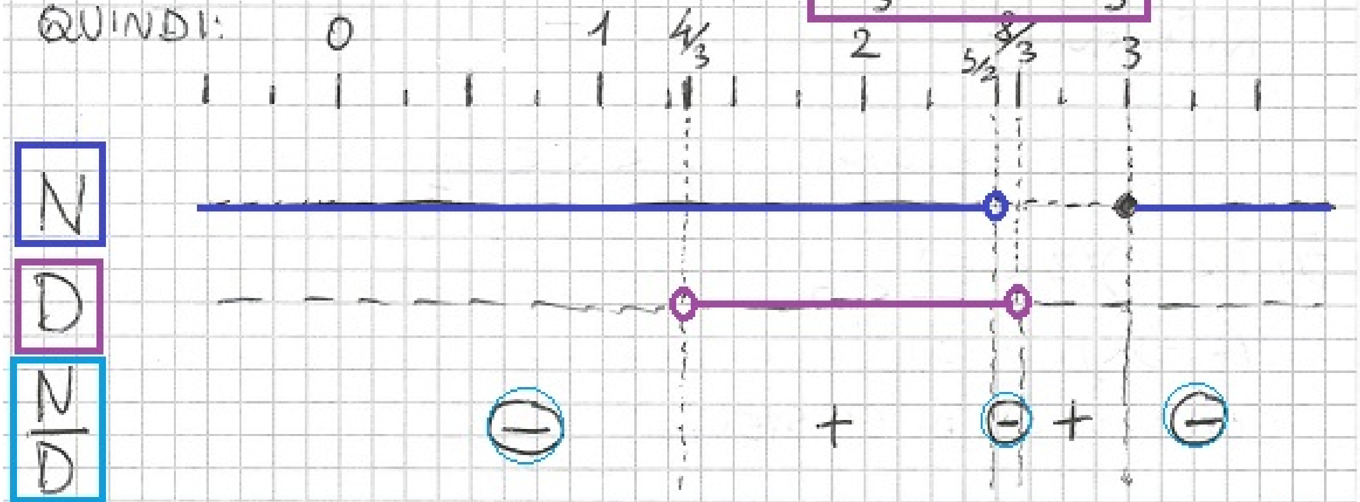
$3x-8>0 \quad 3x>8 \quad \boxed{x>\frac{8}{3}}$

PRODOTTO



$$\boxed{\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}}$$

QUINDI:



$$\boxed{\text{SOLUZIONI:} \quad x<\frac{4}{3} \cup \frac{5}{2} \leq x < \frac{8}{3} \cup x>3}$$

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

3

DISEQUAZIONI DI 1°GRADO AD UNA INCOGNITA PARAMETRICHE

OLTRE ALLE INCOGNITE COMPAIONO ALTRE LETTERE CHE NELLA RISOLUZIONE SI POSSONO CONSIDERARE COSTANTI, MA PER LE QUALI VA FATTA UNA DISCUSSIONE.

DISCUSSIONE CHE È TANTO PIÙ VASTA QUANTO MAGGIORE È IL NUMERO DEI PARAMETRI.

DI CONSEGUENZA NON ESISTONO REGOLE FISSE PER LA RISOLUZIONE MA SOLO MODI DI OPERARE CHE PROVIAMO A VEDERE CON ALCUNI ESEMPI.

DISEQUAZIONE CON PARAMETRO COME TERMINE NOTO

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA DISEQUAZIONE:

$$8x \geq 2a+1$$

$$x \geq \frac{2a+1}{8}$$ È LA SOLUZIONE

DISEQUAZIONE CON PARAMETRO COME COEFFICIENTE DELL'INCOGNITA

CONSIDERIAMO:

$$ax - 5x < 10$$

$$(a-5)x < 10$$

i) SE $(a-5)=0 \Rightarrow a=5$ COSÌ $0x<10 \Rightarrow 0<10$ IMPOSSIBILE

ii) SE $(a-5)<0 \Rightarrow a<5$ ED ESSENDO IL COEFFICIENTE DELLA X NEGATIVO SI INVERTE IL VERSO

COSÌ

$$x > \frac{10}{a-5}$$

È LA SOLUZIONE

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

$\boxed{iii)}$ SE $(a-5)>0 \Rightarrow \boxed{a>5}$ COSÌ $\boxed{x<\frac{10}{a-5}}$ SOLUZIONE

IN DEFINITIVA:

$$\boxed{ax-5x<10} \begin{cases} \text{SE } \boxed{a=5} & \text{IMPOSSIBILE} \\ \text{SE } \boxed{a<5} & \boxed{\text{SOLUZIONE } x>\frac{10}{a-5}} \\ \text{SE } \boxed{a>5} & \boxed{\text{SOLUZIONE } x<\frac{10}{a-5}} \end{cases}$$

DISEQUAZIONE CON PARAMETRO AL DENOMINATORE

CONSIDERIAMO:

$$\boxed{\frac{2x-4a}{a-1}>0}$$

$\boxed{i)}$ SE $a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$ NESSUN SIGNIFICATO

$\boxed{ii)}$ SE $a-1<0 \Rightarrow \boxed{a<1}$

ALLORA MOLTIPLICHIAMO AMBO I MEMBRI PER UNA QUANTITÀ NEGATIVA E IL VERSO CAMBIA, CIOÈ:

$$\cancel{(a-1)}\cdot\frac{2x-4a}{\cancel{a-1}}<0\cdot\cancel{(a-1)}$$

$2x-4a<0 \Rightarrow 2x<4a \Rightarrow \boxed{x<2a}$ SOLUZIONE

$\boxed{iii)}$ SE $a-1>0 \Rightarrow \boxed{a>1}$

LA QUANTITÀ È POSITIVA E IL VERSO NON CAMBIA

$$\cancel{(a-1)}\cdot\frac{2x-4a}{\cancel{a-1}}>0\cdot\cancel{(a-1)}$$

$2x-4a>0 \Rightarrow 2x>4a \Rightarrow \boxed{x>2a}$ SOLUZIONE

IN DEFINITIVA:

$$\boxed{\frac{2x-4a}{a-1}>0}$$

- SE $\boxed{a=1}$ NESSUN SIGNIFICATO
- SE $\boxed{a<1}$ $\boxed{\text{SOLUZIONE } x<2a}$
- SE $\boxed{a>1}$ $\boxed{\text{SOLUZIONE } x>2a}$

ESERCIZI DI RIEPILOGO

1) $4(2x-7)-3x+8(3-x)>9x-4(3x-1)+20$

$8x-21-3x+24-8x>9x-12x+4+20$

$\cancel{8x}-3x-\cancel{8x}-9x+12x>\cancel{4}+\cancel{20}+21-\cancel{24}$

$-\cancel{12x}+\cancel{12x}>21$

$\boxed{0>21}$ IMPOSSIBILE

2) $(x+5)\cdot(x+3)\geq(x+9)(x+1)$

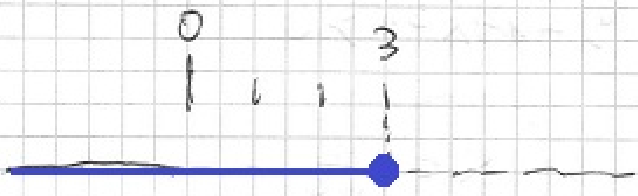
$\cancel{x^2}+3x+5x+15\geq\cancel{x^2}+x+9x+9$

$3x+5x-x-9x\geq 9-15$

$-2x\geq-6$

$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}\leq\frac{-\cancel{6}^{3}}{\cancel{-2}}$

$\boxed{x\leq 3}$



3) $\frac{x+2}{2}-2x\geq\frac{4x+3}{3}-x$

$\frac{3(x+2)-12x}{\cancel{6}}\geq\frac{2(4x+3)-6x}{\cancel{6}}$

$3x+\cancel{6}-12x\geq 8x+\cancel{6}-6x$

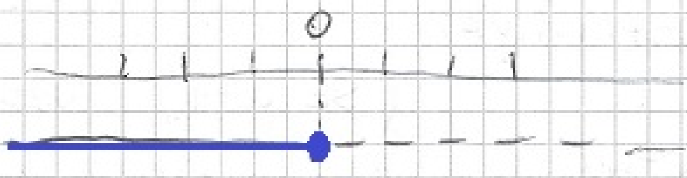
$3x-12x-8x+6x\geq 0$

$-11x\geq 0$

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

$$\frac{\cancel{-11}x}{\cancel{-11}} \le \frac{0}{\cancel{-11}}$$

$\boxed{x \le 0}$



4) $\dfrac{x-2}{x+5} > \dfrac{3}{x-2} + 1$

C.E.:

$x+5 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq -6}$

$x-2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 2}$

$$\frac{x-2}{x+5} - \frac{3}{x-2} - 1 > 0$$

$$\frac{(x-2)(x-2) - 3(x+5) - (x+5)(x-2)}{(x+5)(x-2)} > 0$$

$$\frac{\cancel{x^2} \cancel{-2x} -2x +4 -3x -15 \cancel{-x^2} \cancel{+2x} -5x +10}{(x+5)(x-2)} > 0$$

$$\frac{-2x -3x -5x +4 -15 +10}{(x+5)(x-2)} > 0$$

$$\boxed{\frac{-10x -1}{(x+5)(x-2)} > 0}$$

N $-10x - 1 > 0$

$10x < -1$

$\boxed{x < -\frac{1}{10}}$

D LO RISOLVIAMO COME PRODOTTO DI 2 FATTORI:

$(x+5) > 0 \Rightarrow x > -5$

$(x-2) > 0 \Rightarrow x > +2$

PRODOTTO

$\boxed{x < -5}$

$\boxed{x > 2}$

COSÌ:

N

D

RAPPORTO $\frac{N}{D}$

SOLUZIONI: $x < -5 \cup -\frac{1}{10} < x < 2$