DISEQUAZIONI IN 2 INCOGNITE

SONO QUELLE DISUGUAGLIANZE TRA 2 ESPRESSIONI ALGEBRICHE NELLE QUALI COMPAIONO 2 INCOGNITE E NELLA FORMA NORMALE SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$A(x,y) \gtreqless 0$$

DOVE $A(x,y)$ È UN POLINOMIO NELLE INCOGNITE x E y.

NATURALMENTE NON SEMPRE UNA DISEQUAZIONE SI PRESENTA IN FORMA NORMALE COSÌ PRIMA DI PROCEDERE CON QUALSIASI CALCOLO PER SCRIVERLA IN FORMA NORMALE, QUALORA L'ESPRESSIONE DI $A(x,y)$ LO RICHIEDA (PRESENZA DI FRAZIONI ALGEBRICHE, RADICALI...) BISOGNA DETERMINARE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA DA IMPORRE POI ALLE EVENTUALI SOLUZIONI.

LE SOLUZIONI DI UNA DISEQUAZIONE DI QUESTO TIPO È DATO DALL'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI VALORI DI x E y (LE DUE INCOGNITE) CHE CONGIUNTAMENTE (CIOÈ CONTEMPORANEAMENTE) SODDISFANO LA DISUGUAGLIANZA.

PER QUESTO TALI SOLUZIONI SI POSSONO INTENDERE COME UN INSIEME DI COPPIE (x,y) ORDINATE.

VISTO CHE UNA COPPIA DI VALORI (x,y) RAPPRESENTA UN PUNTO NEL PIANO, DA QUI SI COMPRENDE LA DIFFERENZA CON LE EQUAZIONI AD UNA INCOGNITA.

COME SAPPIAMO PER LE EQUAZIONI AD UNA INCOGNITA L'INSIEME DELLE SOLUZIONI SI PUÒ RAPPRESENTARE

CON LA RETTA ORIENTATA DEI NUMERI REALI, UNA INCOGNITA, CIOÈ UNA DIMENSIONE, CIOÈ UNA RETTA.
NELLE EQUAZIONI A 2 INCOGNITE INVECE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI SI PUÒ RAPPRESENTARE NEL PIANO CARTESIANO COME UN INSIEME DI PUNTI (COPPIE ORDINATE DI VALORI), PERCHÉ 2 INCOGNITE, CIOÈ 2 DIMENSIONI, CIOÈ UN PIANO.
PER DISEGNARE LE SOLUZIONI DI QUESTO TIPO DI DISEQUAZIONI NEL PIANO CARTESIANO BASTA RICORDARE CHE AD OGNI DISEQUAZIONE CORRISPONDE UNA EQUAZIONE ASSOCIATA, CIOÈ ALLA DISEQUAZIONE IN 2 INCOGNITE

$$A(x,y) \gtreqless 0$$

CORRISPONDE L'EQUAZIONE IN 2 INCOGNITE ASSOCIATA

$$A(x,y)=0$$

CHE RAPPRESENTA UN LUOGO GEOMETRICO NEL PIANO CIOÈ UN INSIEME DI PUNTI NEL PIANO.
QUESTO LUOGO GEOMETRICO DIVIDE IL PIANO IN 2 O PIÙ PARTI E IN BASE AL SIMBOLO (O VERSO) DELLA DISEQUAZIONE ($>, \geq, <, \leq$) SI POTRÀ ESSERE IN GRADO DI CAPIRE IN QUALE PARTE SI TROVANO I PUNTI (LE COPPIE DI VALORI (x,y)) SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE.
A TAL FINE SI DISTINGUONO ALCUNI CASI NOTEVOLI.

ALMENO UNA INCOGNITA È DI PRIMO GRADO

SE NELL'EQUAZIONE ASSOCIATA

$$A(x,y)=0$$

UNA DELLE DUE INCOGNITE SI PRESENTA CON GRADO 1 ALLORA L'EQUAZIONE L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME

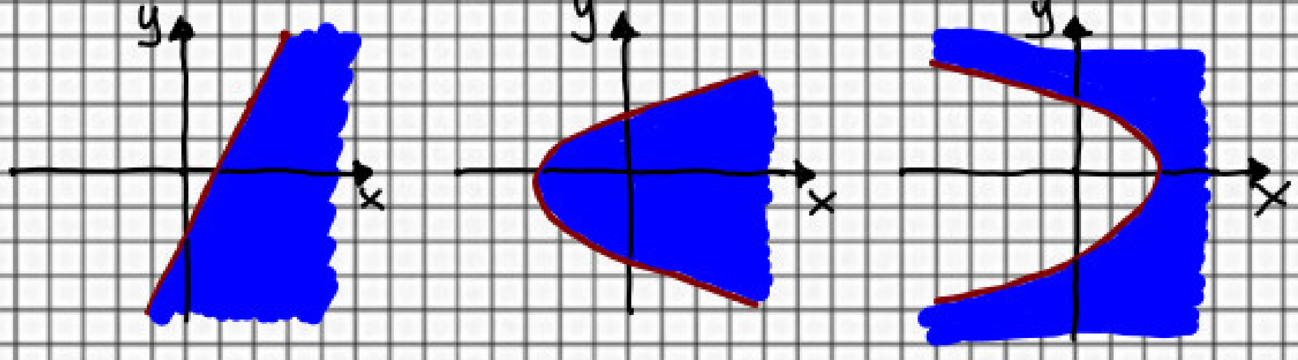
$y=A(x)$ SE y È DI PRIMO GRADO

$x=A(y)$ SE x È DI PRIMO GRADO

DOVE $A(x)$ O $A(y)$ SONO ESPRESSIONI CONTENENTI LA SOLA x O LA SOLA y CHE INDIVIDUANO UN LUOGO GEOMETRICO NEL PIANO, RAPPRESENTANDO UNA CURVA APERTA (RETTA, PARABOLA O FUNZIONE IN UNA VARIABILE) DIVIDENDO IL PIANO STESSO IN DUE PARTI — QUINDI A SECONDA DEL VERSO DELLA DISEQUAZIONE SI POSSONO PRESENTARE 4 DIVERSI CASI:

A $x>A(y)$ [SE $x \geq A(x)$ LE SOLUZIONI COMPRENDONO ANCHE LA RETTA, LA PARABOLA O LA FUNZIONE]

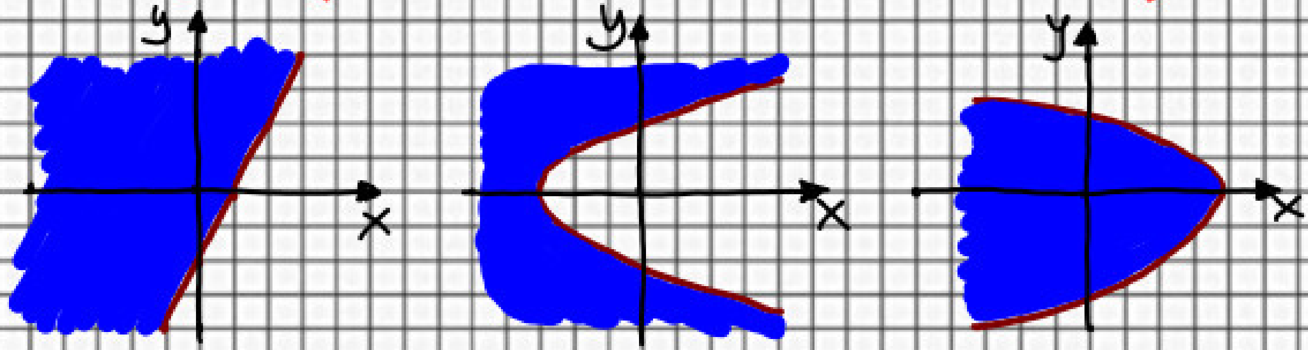
LE SOLUZIONI SONO I PUNTI CHE SI TROVANO NELLA PARTE DI PIANO A DESTRA DELLA RETTA O PARABOLA (O FUNZIONE IN UNA VARIABILE)



B $x < A(y)$

[SE $x \leq A(y)$ LE SOLUZIONI COMPRENDONO ANCHE LA RETTA, LA PARABOLA O LA FUNZIONE]

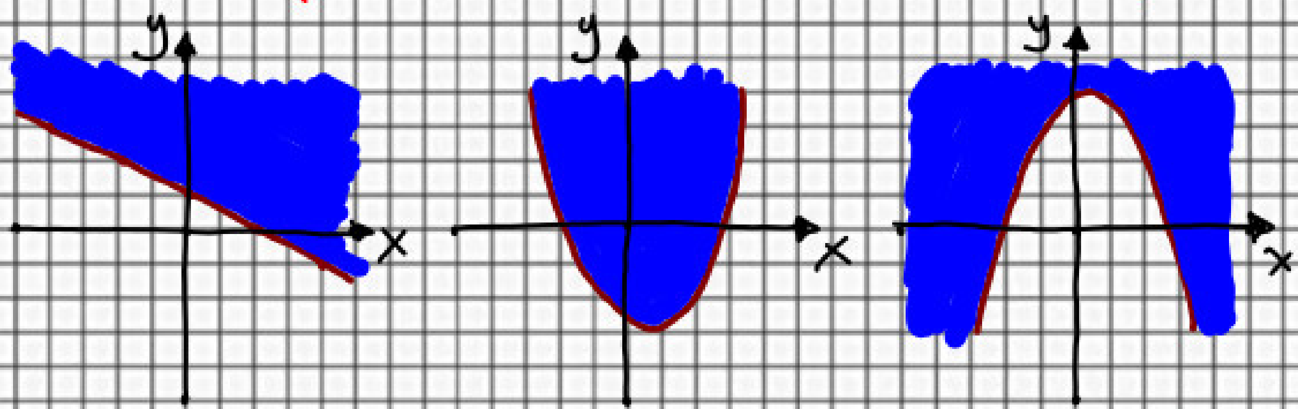
LE SOLUZIONI SONO I PUNTI CHE SI TROVANO NELLA PARTE DI PIANO A SINISTRA DELLA RETTA O PARABOLA (O FUNZIONE IN UNA VARIABILE)



C $y > A(x)$

[SE $y \geq A(x)$ LE SOLUZIONI COMPRENDONO ANCHE LA RETTA, LA PARABOLA O LA FUNZIONE]

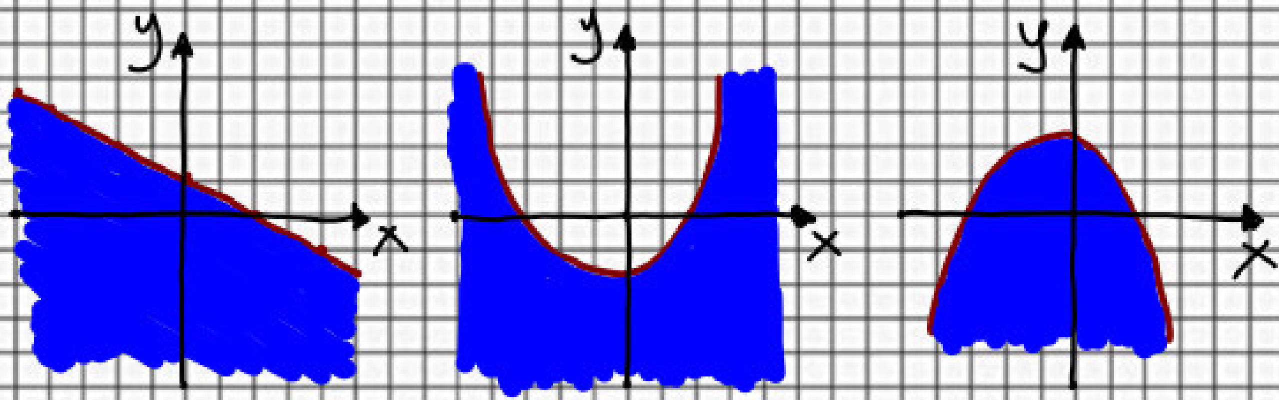
LE SOLUZIONI SONO I PUNTI CHE SI TROVANO NELLA PARTE DI PIANO SOPRA LA RETTA O PARABOLA (O FUNZIONE IN UNA VARIABILE)



D $y < A(x)$

[SE $y \leq A(x)$ LE SOLUZIONI COMPRENDONO ANCHE LA RETTA, LA PARABOLA O LA FUNZIONE]

LE SOLUZIONI SONO I PUNTI CHE SI TROVANO NELLA PARTE DI PIANO SOTTO LA RETTA O PARABOLA (O FUNZIONE IN UNA VARIABILE)



ESEMPI

1 $x-2y>4 \Rightarrow 2y<x-4 \Rightarrow y<\frac{1}{2}x-2$

SIAMO NEL CASO D

$$y<A(x)$$

CON LA RETTA

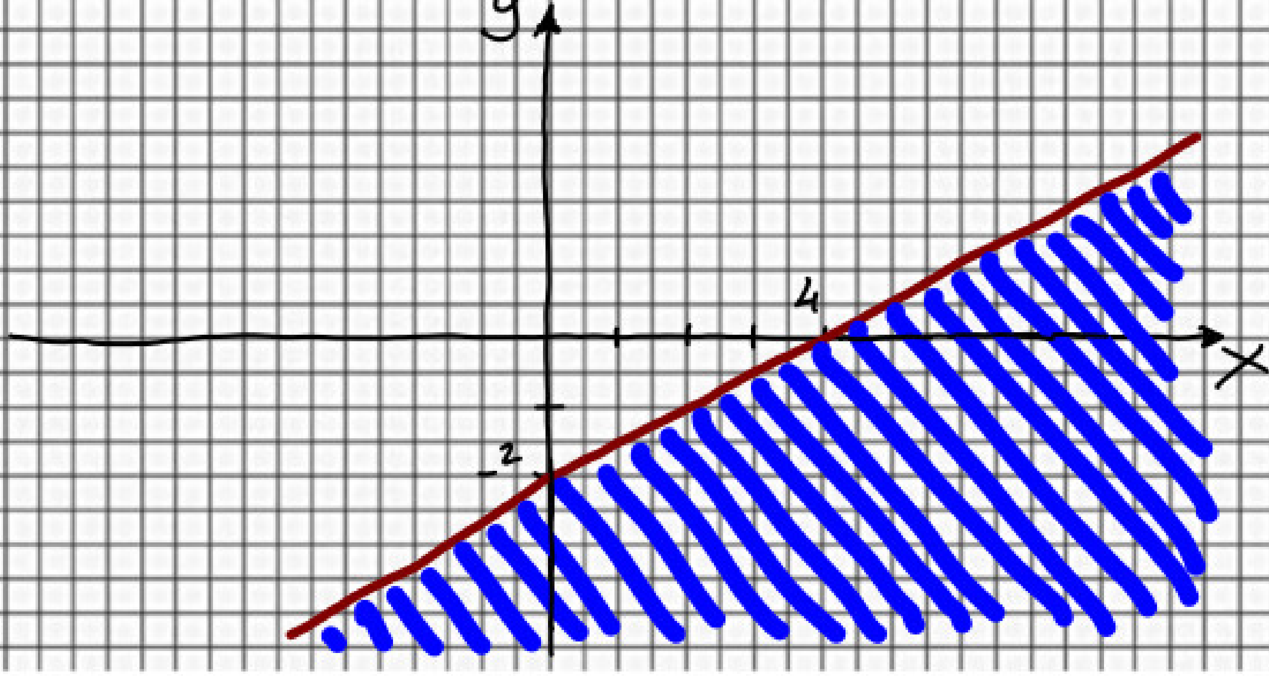
$$y=\frac{1}{2}x-2$$

DISEGNAMO LA RETTA E LE SOLUZIONI SONO I PUNTI NELLA PARTE DI PIANO SOTTO AD ESSA

x	y
0	-2
4	0

PERCHÉ $y=\frac{1}{2}\cdot(0)-2=-2$

$0=\frac{1}{2}x-2 \Rightarrow \frac{1}{2}x=2 \Rightarrow x=4$



2 $y-x^2+x+2\geq 0 \Rightarrow y\geq x^2-x-2$

SIAMO NEL CASO C

$$y\geq A(x)$$

CON LA PARABOLA

$$y=x^2-x-2$$

DISEGNAMO LA PARABOLA E LE SOLUZIONI SONO I PUNTI NELLA PARTE DI PIANO SOPRA AD ESSA COMPRESA LA PARABOLA.

I COEFFICIENTI DELLA PARABOLA SONO

$$a=1 \quad b=-1 \quad c=-2$$

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot 1}=+\frac{1}{2}$$

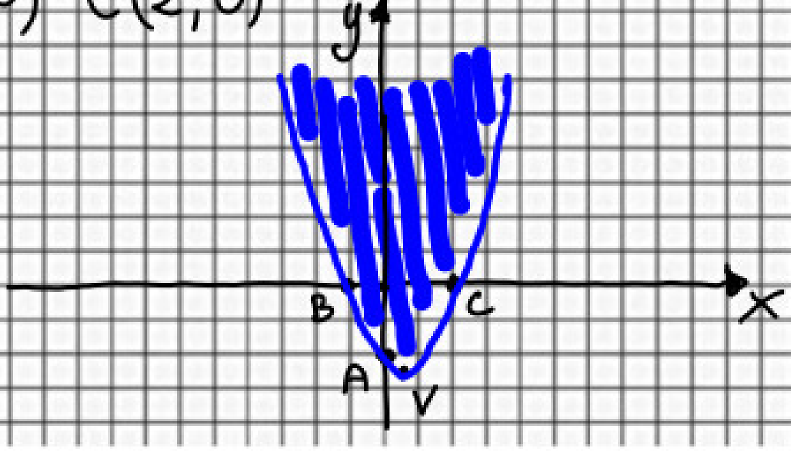
$$-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{-[(-1)^2-4(-2)]}{4}=-\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$$

$$x=0 \Rightarrow y=0^2-0-2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow A(0;-2)$$

$$y=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \qquad \Delta=9$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1-3}{2}=-\frac{2}{2}=-1\\ \frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

$B(-1;0)$ $C(2;0)$



3 $\frac{1}{2}y - x - 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y - 2 < x \Rightarrow x > \frac{1}{2}y - 2$

SIAMO NEL CASO A

$$x > A(y)$$

CON LA RETTA

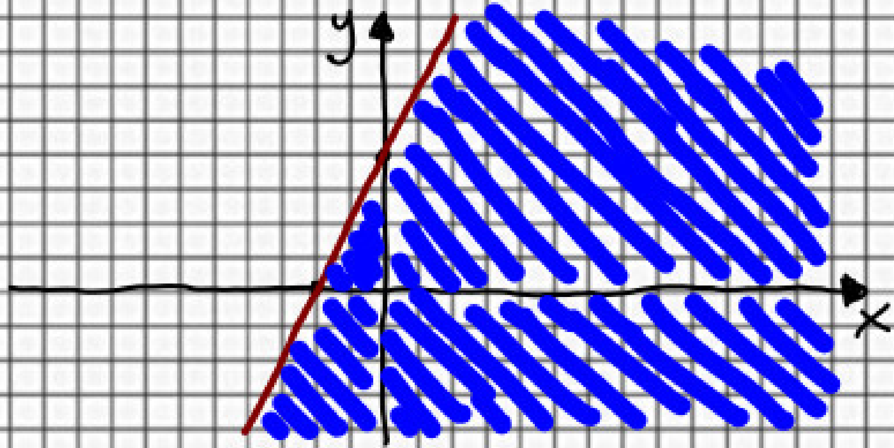
$$x = \frac{1}{2}y - 2$$

DISEGNAMO LA RETTA E LE SOLUZIONI SONO I PUNTI NELLA PARTE DI PIANO A DESTRA DI ESSA

y	x
0	-2
4	0

PERCHÉ $x = \frac{1}{2} \cdot 0 - 2 = -2$

$0 = \frac{1}{2}y - 2 \Rightarrow \frac{1}{2}y = 2 \Rightarrow y = 4$



4 $x - 2y^2 + 4y \geq 2x \Rightarrow x \leq -2y^2 + 4y$

SIAMO NEL CASO B

$$x \leq A(y)$$

CON LA PARABOLA

$$x = -2y^2 + 4y$$

DISEGNAMO LA PARABOLA E LE SOLUZIONI SONO I PUNTI NELLA PARTE DI PIANO A SINISTRA DI ESSA COMPRESA LA PARABOLA.

I COEFFICIENTI DELLA PARABOLA SONO

$a=-2 \quad b=4 \quad c=0$

$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[(4)^2-4(-2)(0)]}{4(-2)} = -\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{-8}_{1}} = 2$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-2)} = -\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{-4}_{1}} = 1$

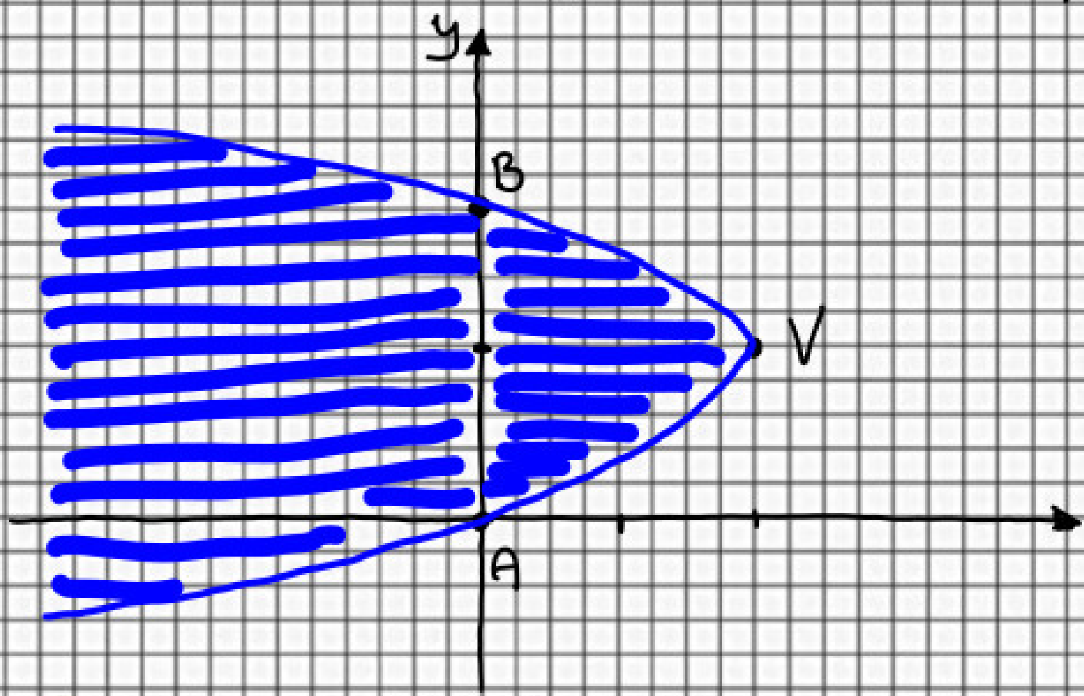
$\Rightarrow V(2;1)$

$x=0 \Rightarrow -2y^2+4y=0 \Rightarrow 2y(-y+2)=0$

$\Rightarrow 2y=0 \Rightarrow y=0$

$\Rightarrow -y+2=0 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow A(0;0) \quad B(0;2)$



DISEQUAZIONI IN 2 INCOGNITE CON CURVE CHIUSE (CIRCONFERENZA O ELLISSE)

NEL CASO IN CUI L'EQUAZIONE ASSOCIATA ALLA DISEQUAZIONE INDIVIDUA UNA CIRCONFERENZA O UNA ELLISSE, LE CUI EQUAZIONI IN FORMA

NORMALE SONO

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ CIRCONFERENZA

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ CON $a>b$ OPPURE $a<b$ ELLISSE

TALE LUOGO GEOMETRICO (CHE SIA UNA CIRCONFERENZA O UNA ELLISSE) DIVIDE IL PIANO SEMPRE IN DUE PARTI.

LO SI RAPPRESENTA NEL PIANO CARTESIANO E NELLA DISEQUAZIONE CON TUTTI I TERMINI AL PRIMO MEMBRO E NEL CASO DELLA CIRCONFERENZA ENTRAMBI I TERMINI DI 2° GRADO CON SEGNO POSITIVO, SI VERIFICA IL VERSO IN MODO CHE:

A SE $>$ LE SOLUZIONI SONO I PUNTI CHE SI TROVANO NELLA PARTE DI PIANO ESTERNA ALLA CIRCONFERENZA O ELLISSE.
SE $\geq$ LE SOLUZIONI COMPRENDONO ANCHE LA CIRCONFERENZA O ELLISSE.

B SE $<$ LE SOLUZIONI SONO I PUNTI CHE SI TROVANO NELLA PARTE DI PIANO INTERNA ALLA CIRCONFERENZA O ELLISSE.
SE $\leq$ LE SOLUZIONI COMPRENDONO ANCHE LA CIRCONFERENZA O ELLISSE.

ESEMPI

1 $x^2+4x+1<2y-y^2$

$x^2+4x+1-2y+y^2<0$

$x^2+y^2+4x-2y+1<0 \Rightarrow x^2+y^2+4x-2y+1=0$

L'EQUAZIONE ASSOCIATA RAPPRESENTA UNA CIRCONFERENZA CON COEFFICIENTI

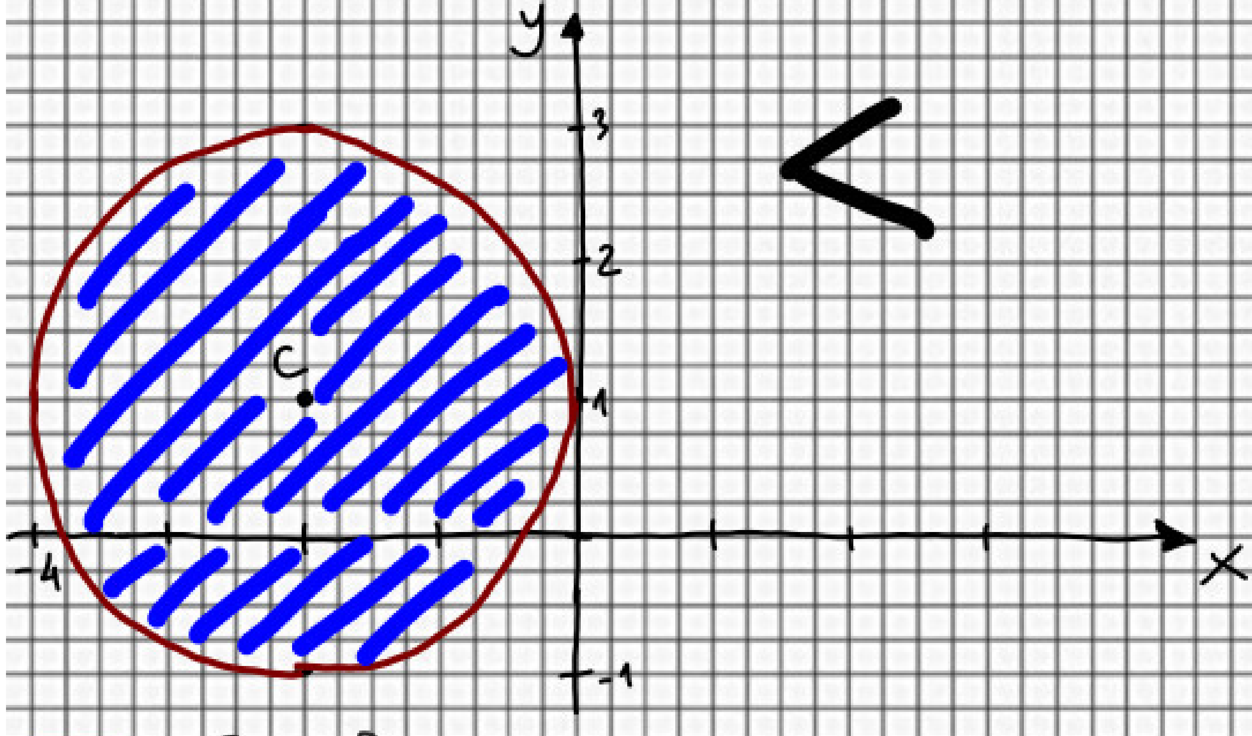
$a=4 \quad b=-2 \quad c=1$

COSÌ

$\alpha=-\frac{a}{2}=-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}}=-2 \qquad \beta=-\frac{b}{2}=-\frac{\cancel{-2}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=1$

$C(\alpha;\beta) \Rightarrow C(-2;1)$

$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(1)^2-1}=\sqrt{4}=2$



2 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\geq 1$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

L'EQUAZIONE ASSOCIATA RAPPRESENTA UNA ELLISSI CON ASSE

MAGGIORE SULLE ORDINATE (CIOÈ COEFFICIENTE $a<b$) E FUOCHI SULL'ASSE y, COSÌ:

$$a^2=4 \qquad b^2=9 \qquad c^2=b^2-a^2=5$$
$$a=2 \qquad b=3 \qquad c=\sqrt{5}$$

QUINDI

$$2a = \text{ASSE MINORE} = 2\cdot 2=5$$
$$2b = \text{ASSE MAGGIORE} = 2\cdot 3=6$$
$$F_1(0,-\sqrt{5}) \qquad F_2(0,+\sqrt{5})$$

TROVIAMO L'INTERSEZIONE CON GLI ASSI E RAPPRESENTIAMOLA SUL PIANO CARTESIANO:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad \text{ASSE } y$$

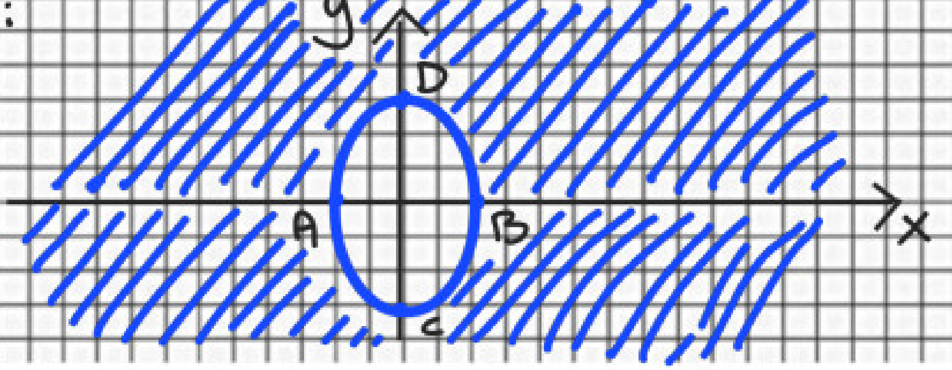
$$\frac{x^2}{4}=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2 \Rightarrow A(-2;0) \quad B(2;0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ x=0 \end{cases} \qquad \text{ASSE } x$$

$$\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow y_{1,2}=\pm 3 \Rightarrow C(0;-3) \quad D(0;+3)$$

VISTO CHE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE È $\geq$ LE SOLUZIONI SONO TUTTI I PUNTI ESTERNI COMPRESA L'ELLISSE:

$\geq$



DISEQUAZIONI IN 2 INCOGNITE CON IPERBOLE

NEL CASO IN CUI L'EQUAZIONE ASSOCIATA INDIVIDUA UNA IPERBOLE, CHE IN NELLA FORMA CANONICA LA POSSIAMO SCRIVERE COME

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

UNA VOLTA RAPPRESENTATA L'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO SI IDENTIFICA COME PARTE INTERNA LA PARTE DI PIANO COMPRESA TRA I 2 RAMI MENTRE SARÀ LA PARTE ESTERNA LE RESTANTI 2 PARTI DI PIANO.

NELLA DISEQUAZIONE PORTIAMO TUTTO AL PRIMO MEMBRO TRANNE IL TERMINE NOTO CHE SARÀ AL SECONDO OTTENENDO COSÌ UNA FORMA COME:

$$A(x,y) \gtreqless c$$

DOVE

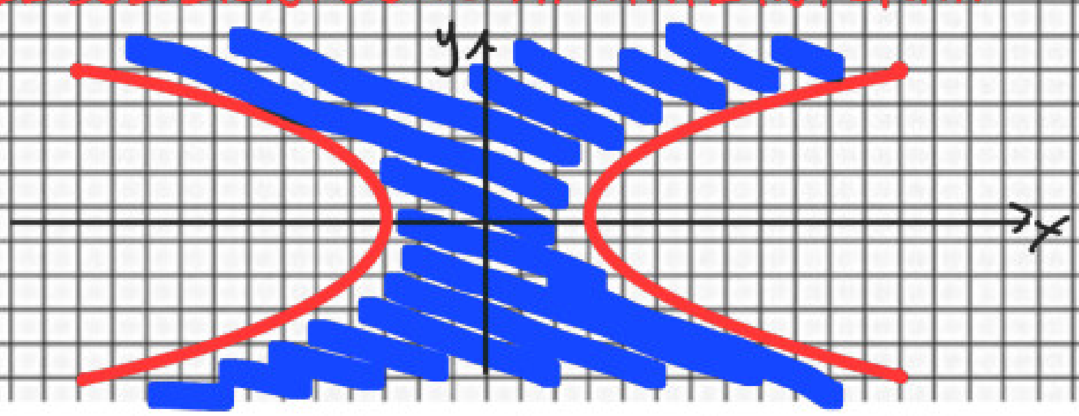
$A(x,y)$ È UN POLINOMIO NELLE INCOGNITE $x,y \in \mathbb{R}$

c È UN NUMERO TALE CHE $c \in \mathbb{R}$

COSÌ, CONSIDERANDO CHE CON $\geq$ O $\leq$ È INCLUSA ANCHE L'IPERBOLE

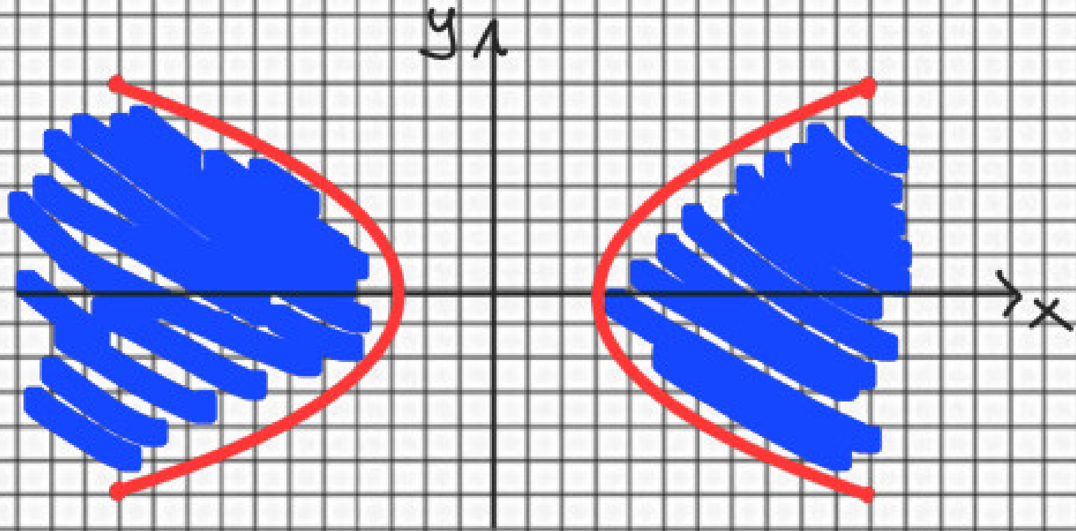
A $A(x,y)<c$ CON $c>0$

LE SOLUZIONI SONO LA PARTE INTERNA



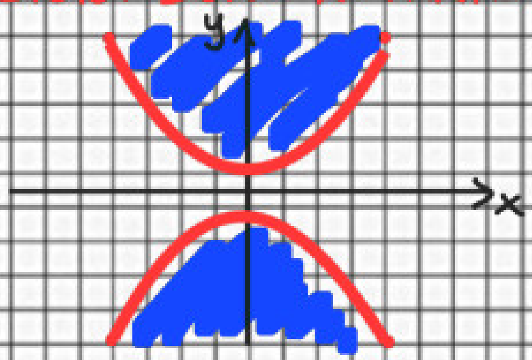
B $A(x,y)>c$ CON $c>0$

LE SOLUZIONI SONO LA PARTE ESTERNA



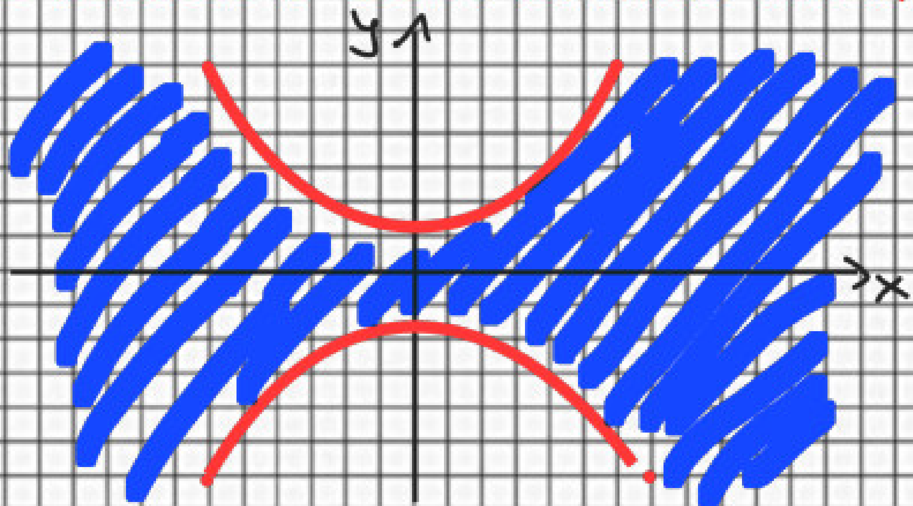
C $A(x,y)<c$ CON $c<0$

LE SOLUZIONI SONO LA PARTE ESTERNA



D $A(x,y)>c$ CON $c<0$

LE SOLUZIONI SONO LA PARTE INTERNA



ESEMPIO

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}\geq 1$$

L'EQUAZIONE ASSOCIATA È UNA IPERBOLE CON FUOCHI SULL'ASSE X

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$$

PER DISEGNARLA SUL PIANO CARTESIANO CALCOLIAMO LE INTERSEZIONI CON L'ASSE X E LE RETTE DEGLI ASINTOTI:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{25}=1\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm5\Rightarrow \begin{matrix}A(-5,0)\\ B(5,0)\end{matrix}$$

ASINTOTI

$$y=-\frac{b}{a}x \quad E \quad y=\frac{b}{a}x$$

DOVE $a=\sqrt{25}=5$ E $b=\sqrt{4}=2$, COSÌ

$$y=-\frac{2}{5}x \quad E \quad y=\frac{2}{5}x$$

QUINDI