DIVISIONE DI POLINOMI

SE CONSIDERIAMO LA DIVISIONE TRA DUE NUMERI

$$N : M$$

DOVE N È IL DIVIDENDO ED M È IL DIVISORE, SAPPIAMO CHE SE Q È IL QUOZIENTE ED R IL RESTO, ALLORA VALE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\boxed{\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}}$$

CIOÈ:

$$\boxed{N = M \times Q + R}$$

SE CONSIDERIAMO QUINDI LA SITUAZIONE IN CUI SIA IL DIVIDENDO CHE IL DIVISORE SONO ENTRAMBI DEI POLINOMI, CIOÈ

DIVISIONE DI POLINOMI

$P(x)$ POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO n

$D(x)$ POLINOMIO DIVISORE DI GRADO m

ALLORA SE $n \geq m$, CIOÈ IL POLINOMIO DIVIDENDO HA GRADO MAGGIORE O AL MASSIMO UGUALE AL GRADO DEL POLINOMIO DIVISORE, EFFETTUARE LA DIVISIONE

$$P(x) : D(x)$$

SIGNIFICA DETERMINARE UN ALTRO POLINOMIO QUOZIENTE $Q(x)$ CON GRADO $n-m$ ED UN POLINOMIO RESTO $R(x)$ CON GRADO MINORE DI m O NULLO, PER I QUALI VALE SEMPRE LA RELAZIONE:

$$\boxed{P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)}$$

DIVIDENDO = DIVISORE X QUOZIENTE + RESTO

DIVISIONE DI POLINOMI

OSSERVAZIONE:

SE IL POLINOMIO RESTO È DI GRADO NULLO, CIOÈ $R(x)=0$, ALLORA SI DICE CHE IL DIVIDENDO $P(x)$ È DIVISIBILE PER IL DIVISORE $D(x)$ E LA DIVISIONE È ESATTA.

DETERMINIAMO I POLINOMI QUOZIENTE $Q(x)$ E RESTO $R(x)$ ATTRAVERSO ALCUNI

ESEMPI:

1) $(-7x^3+1+x^5):(-3+x^2)$

PER PRIMA COSA SI ORDINANO I POLINOMI SECONDO LE POTENZE DECRESCENTI DELLA INCOGNITA:

$$(x^5-7x^3+1):(x^2-3)$$

POI SI COMPLETANO I POLINOMI CON

DIVISIONE DI POLINOMI

GLI EVENTUALI TERMINI MANCANTI:

$$\left(x^5+0x^4-7x^3+0x^2+0x+1\right):\left(x^2+0x-3\right)$$

SI DISPONGONO DIVIDENDO A SINISTRA E DIVISORE A DESTRA, IN TABELLA (COME PER LE DIVISIONI TRA NUMERI)

$$\begin{array}{l|l}
x^5+0x^4-7x^3+0x^2+0x+1 & x^2+0x-3 \\
\hline
 & x^3
\end{array}$$

PRIMO PASSO

SI DIVIDE IL PRIMO TERMINE DEL DIVIDENDO x^5 PER IL PRIMO TERMINE DEL DIVISORE x^2 E SI SCRIVE IL RISULTATO IN TABELLA IN BASSO A DESTRA

DIVISIONE DI POLINOMI

$$x^5+0x^4-7x^3+0x^2+0x+1 \;\Big|\; x^2+0x-3$$

$$-x^5-0x^4+3x^3 \qquad\qquad x^3$$

$*$

SECONDO PASSO

SI MOLTIPLICA IL MONOMIO TROVATO (x^3) PER CIASCUN TERMINE DEL POLINOMIO DIVISORE E OGNI VOLTA SI SCRIVE IL RISULTATO CAMBIATO DI SEGNO SOTTO I TERMINI DELLO STESSO SEGNO DEL POLINOMIO DIVIDENDO

$$\cancel{x^5}+0x^4-7x^3+0x^2+0x+1 \;\Big|\; x^2+0x-3$$

$$\cancel{-x^5}-0x^4+3x^3 \qquad\qquad x^3$$

$$// \quad // \quad -4x^3+0x^2+0x+1$$

DIVISIONE DI POLINOMI

PASSO 3

SI SOMMANO I TERMINI SIMILI
E SI RIPORTA IL RISULTATO
ELIMINANDO COSÌ IL TERMINE
DI GRADO MASSIMO, OTTENENDO
UN NUOVO POLINOMIO, E FIN QUANDO
IL GRADO DI QUESTO NUOVO POLINOMIO È
MAGGIORE O UGUALE A QUELLO DEL DIVISORE
SI RIPARTE SEMPRE DAL PASSO 1.

COSÌ:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
\cancel{x^5} & +0x^4 & -7x^3 & -0x^2 & +0x & +1 & x^2+0x-3 \\
\cancel{-x^5} & -0x^4 & +3x^3 & & & & \hline x^3-4x \\
\hline
// & // & -4x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & \\
 & & +4x^3 & & -12x & & \\
\hline
 & & // & // & -12x & +1 &
\end{array}
$$

QUOZIENTE

RESTO

DIVISIONE DI POLINOMI

SI È OTTENUTO UN POLINOMIO DI GRADO 1 INFERIORE AL GRADO DEL DIVISORE (2) E QUINDI IL PROCEDIMENTO SI CONCLUDE COSÌ:

$$Q(x) = x^3 - 4x$$

$$R(x) = -12x + 1$$

IN DEFINITIVA:

$$(x^5 - 7x^3 + 1) = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 4x) - 12x + 1$$

DIVIDENDO = DIVISORE X QUOZIENTE + RESTO

DIVISIONE DI POLINOMI

2) $\boxed{(y+2y^4):(3+y^2-y)}$

ORDINIAMO I POLINOMI

$$(2y^4+y):(y^2-y+3)$$

AGGIUNGIAMO GLI EVENTUALI TERMINI MANCANTI

$$(2y^4+0y^3+0y^2+y+0):(y^2-y+3)$$

SVOLGIAMO LA DIVISIONE IN TABELLA:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{2y^4}+0y^3+0y^2+y+0 & y^2-y+3 \\
\hline
\cancel{-2y^4}+2y^3-6y^2+0+0 & 2y^2+2y-4 \\
\hline
// \quad \cancel{+2y^3}-6y^2+y+0 & \\
\quad \cancel{-2y^3}+2y^2-6y+0 & \\
\hline
\quad \cancel{-4y^2}-5y+0 & \\
\quad \cancel{+4y^2}-4y+12 & \\
\hline
\quad -9y+12 &
\end{array}
$$

QUINDI:

$$(2y^4+y)=(y^2-y+3)\cdot(2y^2+2y-4)-9y+12$$

3) $(x^2-y^2):(x-y)$

CONSIDERIAMO COME VARIABILE LA LETTERA X, COSÌ

$(x^2+0x-y^2):(x-y)$

CIOÈ:

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & +0x & -y^2 & x-y \\ \cline{4-4}
-\cancel{x^2} & +xy & +0 & x+y \\ \cline{1-3}
// & +\cancel{xy} & -\cancel{y^2} & \\
 & -\cancel{xy} & +\cancel{y^2} & \\ \cline{2-3}
 & // & // &
\end{array}
$$

QUINDI:

$(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)$

4) $x^4:(x^2+x+1)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
-\cancel{x^4} & -x^3 & -x^2 & & & x^2-x \\ \cline{1-5}
 & -\cancel{x^3} & -\cancel{x^2} & +0x & +0 & \\
 & +\cancel{x^3} & +\cancel{x^2} & +x & & \\ \cline{2-5}
 & & & x & &
\end{array}
$$

$Q(x)=x^2-x$

$R(x)=x$

DIVISIONE DI POLINOMI

TEOREMA DEL RESTO

QUESTO TEOREMA CI PERMETTE DI CALCOLARE IL RESTO DELLA DIVISIONE DI UN POLINOMIO QUALSIASI PER UN POLINOMIO DI 1° GRADO SENZA DOVER EFFETTUARE LA DIVISIONE.

CONSIDERIAMO LA DIVISIONE DI UN POLINOMIO $P(x)$ PER UN POLINOMIO DI 1° GRADO DEL TIPO

$$(x-c)$$

DOVE c È UN NUMERO.

IL RESTO DI TALE DIVISIONE È IL VALORE DEL POLINOMIO CALCOLATO PROPRIO IN c.

DIVISIONE DI POLINOMI

CIOÈ: $R(x) = P(c)$

DIMOSTRAZIONE:

CONSIDERIAMO:

- $P(x)$ DIVIDENDO
- $D(x) = (x - c)$ DIVISORE
- $Q(x)$ QUOZIENTE
- $R(x)$ RESTO

SAPPIAMO CHE:

$\boxed{\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}}$

QUINDI:

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R(x)$$

VISTO CHE IL GRADO DEL RESTO DEVE ESSERE

DIVISIONE DI POLINOMI

MINORE DEL GRADO DEL DIVISORE, ALLORA

GRADO DI $R(x) < 1$

DI CONSEGUENZA IL RESTO $R(x)$ O HA GRADO $\varnothing$ (ZERO) CIOÈ È UN NUMERO OPPURE È IL POLINOMIO NULLO, QUINDI NON DIPENDE DALLA VARIABILE x E LO POSSIAMO INDICARE SEMPLICEMENTE CON R, COST

$$P(x) = (x-c) \cdot Q(x) + R$$

SOSTITUENDO $x = c$

$$P(c) = \underbrace{\cancel{(c-c)}}_{0} \cdot Q(c) + R$$

CIOÈ

$$P(c) = \underbrace{\cancel{0 \cdot Q(c)}}_{0} + R$$

ED IN DEFINITIVA

$$\boxed{P(c) = R}$$

c.v.d.

ESTENSIONE:

NEL CASO IN CUI IL POLINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO NON È **MONICO** (CIOÈ UN

DIVISIONE DI POLINOMI

POLINOMIO IN CUI IL COEFFICIENTE DEL MONOMIO DI GRADO MASSIMO È 1)
OSSIA SI PRESENTA NELLA FORMA:

$$(ax-b)$$

IN QUESTO CASO BISOGNA ESPRIMERLO COME:

$$(\underline{ax-b})=a\left(x-\frac{b}{a}\right)$$

E PER CALCOLARE IL RESTO BISOGNA DETERMINARE IL VALORE DEL POLINOMIO DIVIDENDO IN

$$\boxed{c=\frac{b}{a}}$$

CIOÈ:

$$R(x)=P\left(\frac{b}{a}\right)$$

ESEMPI

1) DETERMINIAMO IL RESTO DELLA DIVISIONE

TRA $P(x)=x^4+2x^3-x+1$

$D(x)=x+1$

RISCRIVIAMO IL DIVISORE NELLA FORMA

$$(x-c)$$

DIVISIONE DI POLINOMI

CIOÈ

$$D(x) = (x+1) = [x-(-1)]$$

COSÌ: $\boxed{c=-1}$

CALCOLIAMO QUINDI IL RESTO

$$R(x) = P(c) = P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1) + 1 =$$

$$= 1 - 2 + 1 + 1 = 1$$

$$\boxed{R(x) = 1}$$

DI CONSEGUENZA, SENZA EFFETTUARE LA DIVISIONE, POSSIAMO DIRE CHE

$R(x) \neq 0$ ALLORA $P(x)$ NON È DIVISIBILE PER $D(x)$ E LA DIVISIONE **NON SARÀ ESATTA**.

2) DETERMINIAMO IL RESTO DELLA DIVISIONE TRA

$$P(y) = 12y^3 + 23y^2 + 5y$$

$$D(y) = 4y + 1$$

INNANZITUTTO OSSERVIAMO CHE IL

DIVISIONE DI POLINOMI

DIVISORE $D(y)$ È DI 1° GRADO MA NON **MONICO**, QUINDI LO RISCRIVIAMO COME

$$D(y) = 4y + 1 = 4\left(y + \frac{1}{4}\right)$$

E LO PORTIAMO NELLA FORMA

$$(y - c)$$

CIOÈ

$$D(y) = 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 4\left[y - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

QUINDI

$$c = -\frac{1}{4}$$

COSÌ

$$R(y) = P(c) = P\left(-\frac{1}{4}\right) = 12\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 23\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= -12 \cdot \frac{1}{64} + 23 \cdot \frac{1}{16} - \frac{5}{4} =$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{23}{16} - \frac{5}{4} = \frac{-3 + 23 - 20}{16} = \frac{0}{16} = 0$$

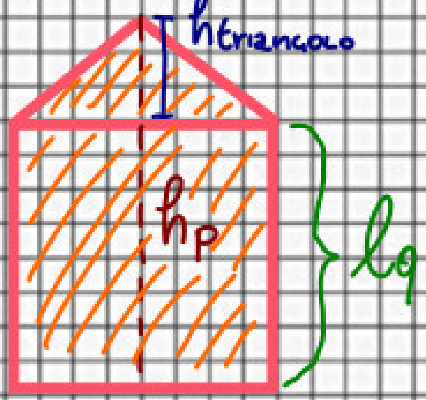
$R(y) = 0$ ALLORA $P(y)$ È DIVISIBILE PER $D(y)$ E LA DIVISIONE **SARÀ ESATTA**

DIVISIONE DI POLINOMI

VEDIAMO COME ULTIMO ESEMPIO LO SVOLGIMENTO DI UNA DIVISIONE TRA POLINOMI PER LA RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA:

SUPPONIAMO DI AVERE UN PANNELLO FORMATO DA UN QUADRATO DI LATO $(5a+2)$ cm ED UN TRIANGOLO ISOSCELE AD ESSO SOVRAPPOSTO CON LA BASE PARI AL LATO DEL QUADRATO.

SE L'ALTEZZA DELL'INTERO PANNELLO MISURA 202 cm E L'AREA DEL PANNELLO È $(30a^2+32a+8)$ cm² QUANTO MISURA "a"?



A_p = AREA PANNELLO = $(30a^2+32a+8)$ cm

l_q = LATO QUADRATO = $(5a+2)$ cm

h_p = ALTEZZA PANNELLO = 202 cm

$a = ?$

CALCOLIAMO INNANZI TUTTO L'AREA DEL QUADRATO

$$A_q = l^2 = (5a+2)^2 = 25a^2+20a+4$$

A QUESTO PUNTO FACENDO LA DIFFERENZA TRA L'AREA DEL PANNELLO A_p E L'AREA DEL QUADRATO A_q OTTENIAMO L'AREA DEL TRIANGOLO A_t:

$$A_t = A_p - A_q = 30a^2+32a+8-(25a^2+20a+4) =$$
$$= 5a^2+12a+4$$

SAPENDO CHE L'AREA DEL TRIANGOLO È UGUALE AL PRODOTTO

DELLA SUA BASE PER LA SUA ALTEZZA DIVISO 2, CIOÈ

$$A_t = \frac{b_t \times h_t}{2}$$

DA QUESTA EGUAGLIANZA CALCOLIAMO L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO h_t:

$$h_t = \frac{2 \times A_t}{b_t}$$

E VISTO CHE $b_t = l_q = 5a + 2$, ALLORA:

$$h_t = \frac{2 \times (5a^2 + 12a + 4)}{5a + 2}$$

CIOÈ

$$h_t = \frac{10a^2 + 24a + 8}{5a + 2}$$

OTTENENDO COSÌ LA DIVISIONE TRA 2 POLINOMI:

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{10a^2} & +24a & +8 & 5a+2 \\ \hline
-\cancel{10a^2} & -4a & & 2a+4 \\ \hline
// & +\cancel{20a} & \cancel{+8} & \\
 & -\cancel{20a} & \cancel{-8} & \\ \hline
 & // & // &
\end{array}$$

QUINDI

$$h_t = 2a + 4$$

A QUESTO PUNTO SAPENDO CHE L'ALTEZZA DEL PANNELLO h_p MISURA 202 cm ED È LA SOMMA DELL'ALTEZZA DEL QUADRATO $h_q = l_q$ CON L'ALTEZZA

DIVISIONE DI POLINOMI

DEL TRIANGOLO h_t:

$$h_p = h_q + h_t$$

$$202 = (5a+2)+(2a+4)$$

OTTENIAMO UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO NELLA INCOGNITA a, COSÌ

$$202 = 5a+2+2a+4$$

$$202 = 7a+6$$

$$196 = 7a$$

$$a = \frac{196}{7}$$

$$\boxed{a = 28}\ \text{cm}$$