

# DIVISIONE DI POLINOMI

SE CONSIDERIAMO LA DIVISIONE TRA DUE NUMERI

$$N : M$$

DOVE  $N$  È IL DIVIDENDO ED  $M$  È IL DIVISORE, SAPPIAMO CHE SE  $Q$  È IL QUOZIENTE ED  $R$  IL RESTO, ALLORA VALE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$$

CIOÈ:

$$N = M \times Q + R$$

SE CONSIDERIAMO QUINDI LA SITUAZIONE IN CUI SIA IL DIVIDENDO CHE IL DIVISORE SONO ENTRAMBI DEI POLINOMI, CIOÈ

# DIVISIONE DI POLINOMI

$P(x)$  POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO  $n$

$D(x)$  POLINOMIO DIVISORE DI GRADO  $m$

ALLORA SE  $n \geq m$ , CIOÈ IL POLINOMIO DIVIDENDO HA GRADO MAGGIORE O AL MASSIMO UGUALE AL GRADO DEL POLINOMIO DIVISORE, EFFETTUARE LA DIVISIONE

$$P(x) : D(x)$$

SIGNIFICA DETERMINARE UN ALTRO POLINOMIO QUOZIENTE  $Q(x)$  CON GRADO  $n-m$  ED UN POLINOMIO RESTO  $R(x)$  CON GRADO MINORE DI  $m$  O NULLO, PER I QUALI VALE SEMPRE LA RELAZIONE:

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

DIVIDENDO = DIVISORE  $\times$  QUOZIENTE + RESTO



# DIVISIONE DI POLINOMI

## OSSERVAZIONE:

SE IL POLINOMIO RESTO È DI GRADO NULLO, CIOÈ  $R(x) = 0$ , ALLORA SI DICE CHE IL DIVIDENDO  $P(x)$  È DIVISIBILE PER IL DIVISORE  $D(x)$  E LA DIVISIONE È ESATTA.

DETERMINIAMO I POLINOMI QUOZIENTE  $Q(x)$  E RESTO  $R(x)$  ATTRAVERSO ALCUNI

## ESEMP:

$$1) (-7x^3 + 1 + x^5) : (-3 + x^2)$$

PER PRIMA COSA SI ORDINANO I POLINOMI SECONDO LE POTENZE DECRESCENTI DELLA INCIGNITA:

$$(x^5 - 7x^3 + 1) : (x^2 - 3)$$

POI SI COMPLETANO I POLINOMI CON



# DIVISIONE DI POLINOMI

GLI EVENTUALI TERMINI MANGANTI:

$$(x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 1) : (x^2 + 0x - 3)$$

SI DISPONGONO DIVIDENDO A SINISTRA  
E DIVISORE A DESTRA, IN TABELLA

(COME PER LE DIVISIONI TRA NUMERI)

$$\begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \quad | \quad x^2 + 0x - 3 \\ \hline \end{array}$$

## PRIMO PASSO

SI DIVIDE IL PRIMO TERMINE DEL  
DIVIDENDO  $x^5$  PER IL PRIMO  
TERMINE DEL DIVISORE  $x^2$  E  
SI SCRIVE IL RISULTATO IN  
TABELLA IN BASSO A DESTRA



# DIVISIONE DI POLINOMI

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 0X^4 - 7X^3 + 0X^2 + 0X + 1 & X^2 + 0X - 3 \\ -X^5 - 0X + 3X^3 & \end{array}$$

$X^3$  (circled in red with an arrow pointing to the dividend)

SECONDO PASSO

SI MOLTIPLICA IL MONOMIO TROVATO ( $X^3$ ) PER CIASCUN TERMINE DEL POLINOMIO DIVISORE E OGNI VOLTA SI SCRIVE IL RISULTATO CAMBIATO DI SEGNO SOTTO I TERMINI DELLO STESSO SEGNO DEL POLINOMIO DIVIDENDO

$$\begin{array}{r|l} \cancel{X^5} + 0X^4 - 7X^3 + 0X^2 + 0X + 1 & X^2 + 0X - 3 \\ -\cancel{X^5} - 0X^4 + 3X^3 & \\ \hline // // -4X^3 + 0X^2 + 0X + 1 & X^3 \end{array}$$



# DIVISIONE DI POLINOMI

## PASSO 3

SI SOMMANO I TERMINI SIMILI  
E SI RIPORTA IL RISULTATO  
ELIMINANDO COSÌ IL TERMINE  
DI GRADO MASSIMO, OTTENENDO  
UN NUOVO POLINOMIO, E FIN QUANDO  
IL GRADO DI QUESTO NUOVO POLINOMIO È  
MAGGIORE O UGUALE A QUELLO DEL DIVISORE  
SI RIPARTE SEMPRE DAL PASSO 1.

COSÌ:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^5} + 0x^4 - 7x^3 - 0x^2 + 0x + 1 & x^2 + 0x - 3 \\ -\cancel{x^5} - 0x^4 + 3x^3 & \hline // // -4x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3 - 4x \\ + 4x^3 & \downarrow \text{QUOZIENTE} \\ // // -12x + 1 & \hline & \downarrow \text{RESTO} \end{array}$$



# DIVISIONE DI POLINOMI

SI È OTTENUTO UN POLINOMIO DI GRADO 1 INFERIORE AL GRADO DEL DIVISORE (2) E QUINDI IL PROCEDIMENTO SI CONCLUDE COSÌ:

$$Q(x) = x^3 - 4x$$

$$R(x) = -12x + 1$$

IN DEFINITIVA:

$$(x^5 - 7x^3 + 1) = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 4x) - 12x + 1$$

DIVIDENDO = DIVISORE  $\times$  QUOZIENTE + RESTO

# DIVISIONE DI POLINOMI

$$2) \quad (y + 2y^4) : (3 + y^2 - y)$$

ORDINIAMO I POLINOMI

$$(2y^4 + y) : (y^2 - y + 3)$$

AGGIUNGIAMO GLI EVENTUALI TERMINI MANCANI.

$$(2y^4 + 0y^3 + 0y^2 + y + 0) : (y^2 - y + 3)$$

SVOLGIAMO LA DIVISIONE IN TABELLA:

$$\begin{array}{r|l} 2y^4 + 0y^3 + 0y^2 + y + 0 & y^2 - y + 3 \\ \hline 2y^4 + 2y^3 - 6y^2 + 0 + 0 & 2y^2 + 2y - 4 \\ \hline // + 2y^3 - 6y^2 + y + 0 & \\ - 2y^3 + 2y^2 - 6y + 0 & \\ \hline - 4y^2 - 5y + 0 & \\ + 4y^2 - 4y + 12 & \\ \hline - 9y + 12 & \end{array}$$

QUINDI:

$$(2y^4 + y) = (y^2 - y + 3) \cdot (2y^2 + 2y - 4) - 9y + 12$$



# DIVISIONE DI POLINOMI

$$3) (x^2 - y^2) : (x - y)$$

CONSIDERIAMO COME VARIABILE LA LETTERA X,  
COSÌ

$$(x^2 + 0x - y^2) : (x - y)$$

CIOÈ:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x - y^2 & x - y \\ -x^2 + xy + 0 & x + y \\ \hline // + xy - y^2 & \\ -xy + y^2 & \\ \hline // & // \end{array}$$

QUINDI:

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

$$4) x^4 : (x^2 + x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 - x^2 & x^2 - x \\ \hline -x^3 - x^2 + 0x + 0 & \\ -x^3 - x^2 + x & \\ \hline & x \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - x$   
 $R(x) = x$



# DIVISIONE DI POLINOMI

## TEOREMA DEL RESTO

QUESTO TEOREMA CI PERMETTE DI CALCOLARE IL RESTO DELLA DIVISIONE DI UN POLINOMIO QUALSIASI PER UN POLINOMIO DI 1° GRADO SENZA DOVER EFFETTUARE LA DIVISIONE. CONSIDERIAMO LA DIVISIONE DI UN POLINOMIO  $P(x)$  PER UN POLINOMIO DI 1° GRADO DEL TIPO

$$(x - c)$$

DOVE  $c$  È UN NUMERO. IL RESTO DI TALE DIVISIONE È IL VALORE DEL POLINOMIO CALCOLATO PROPRIO IN  $c$ .



# DIVISIONE DI POLINOMI

CIOÈ:  $R(x) = P(c)$

## DIMOSTRAZIONE:

CONSIDERIAMO:

-  $P(x)$

DIVIDENDO

-  $D(x) = (x - c)$

DIVISORE

-  $Q(x)$

QUOZIENTE

-  $R(x)$

RESTO

SAPPIAMO CHE:

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISORE} \times \text{QUOZIENTE} + \text{RESTO}$$

QUINDI:

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R(x)$$

VISTO CHE IL GRADO DEL RESTO DEVE ESSERE



# DIVISIONE DI POLINOMI

MINORE DEL GRADO DEL DIVISORE, ALLORA

$$\text{GRADO DI } R(x) < 1$$

DI CONSEGUENZA IL RESTO  $R(x)$  O HA GRADO 0 (ZERO) CIOÈ È UN NUMERO OPPURE È IL POLINOMIO NULLO, QUINDI NON DIPENDE DALLA VARIABILE  $x$  E LO POSSIAMO INDICARE SEMPLICEMENTE CON  $R$ , COSÌ

$$P(x) = (x-c) q(x) + R$$

SOSTITUENDO  $x=c$

$$P(c) = \cancel{(c-c)} \cdot q(c) + R$$

CIOÈ

$$P(c) = 0 \cdot \cancel{q(c)} + R$$

ED IN DEFINITIVA

$$P(c) = R$$

c.v.d.

## ESTENSIONE:

NEL CASO IN CUI IL POLINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO NON È MONICO (CIOÈ UN



# DIVISIONE DI POLINOMI

POLINOMIO IN CUI IL COEFFICIENTE DEL MONOMIO DI GRADO MASSIMO È 1) OSSIA SI PRESENTA NELLA FORMA:

$$(ax - b)$$

IN QUESTO CASO BISOGNA ESPRIMERLO COME.

$$(ax - b) = a \left( x - \frac{b}{a} \right)$$

È PER CALCOLARE IL RESTO BISOGNA DETERMINARE IL VALORE DEL POLINOMIO DIVIDENDO IN

$$c = \frac{b}{a}$$

CIOÈ:

$$R(x) = P\left(\frac{b}{a}\right)$$

## ESempi

1) DETERMINIAMO IL RESTO DELLA DIVISIONE

TRA  $P(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$

$$D(x) = x + 1$$

RISCRIVIAMO IL DIVISORE NELLA FORMA

$$(x - c)$$



# DIVISIONE DI POLINOMI

CIOÈ

$$D(x) = (x+1) = [x - (-1)]$$

COSÌ

$$C = -1$$

CALCOLIAMO QUINDI IL RESTO

$$R(x) = P(C) = P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1) + 1 =$$
$$= 1 - 2 + 1 + 1 = 1$$

$$R(x) = 1$$

DI CONSEGUENZA, SENZA EFFETTUARE LA DIVISIONE, POSSIAMO DIRE CHE

$R(x) \neq 0$  ALLORA  $P(x)$  NON È DIVISIBILE PER  $D(x)$   
E LA DIVISIONE NON SARÀ ESATTA.

2) DETERMINIAMO IL RESTO DELLA DIVISIONE  
TRA

$$P(y) = 12y^3 + 23y^2 + 5y$$

$$D(y) = 4y + 1$$

INNANZI TUTTO OSSERVIAMO CHE IL



# DIVISIONE DI POLINOMI

DIVISORE  $D(x)$  È DI 1° GRADO MA NON MONICO, QUINDI LO RISCRIVIAMO

COME  $D(x) = 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)$

E LO PORTIAMO NELLA FORMA

$$(x - c)$$

CIOÈ

$$D(x) = 4\left(x + \frac{1}{4}\right) = 4\left[x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

QUINDI

$$c = -\frac{1}{4}$$

COSÌ

$$R(x) = P(c) = P\left(-\frac{1}{4}\right) = 12\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 23\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= -12 \cdot \frac{1}{64} + 23 \cdot \frac{1}{16} - \frac{5}{4} =$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{23}{16} - \frac{5}{4} = \frac{-3 + 23 - 20}{16} = \frac{0}{16} = 0$$

$R(x) = 0$  ALLORA  $P(x)$  È DIVISIBILE PER  $D(x)$   
E LA DIVISIONE SARÀ ESATTA

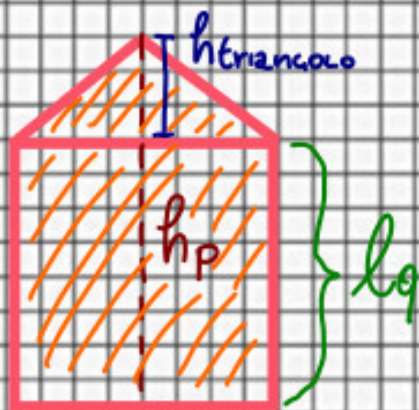


# DIVISIONE DI POLINOMI

VEDIAMO COME ULTIMO ESEMPIO LO SVOLGIMENTO DI UNA DIVISIONE TRA POLINOMI PER LA RISOLUZIONE DI UN **PROBLEMA**:

SUPPONIAMO DI AVERE UN PANNELLO FORMATO DA UN QUADRATO DI LATO  $(5a+2)$  cm ED UN TRIANGOLO ISOSCELE AD ESSO SOVRAPPPOSTO CON LA BASE PARI AL LATO DEL QUADRATO.

SE L'ALTEZZA DELL'INTERO PANNELLO MISURA 202 cm E L'AREA DEL PANNELLO È  $(30a^2+32a+8)$  cm QUANTO MISURA  $a$ ?



$$A_p = \text{AREA PANNELLO} = (30a^2 + 32a + 8) \text{ cm}$$

$$l_q = \text{LATO QUADRATO} = (5a + 2) \text{ cm}$$

$$h_p = \text{ALTEZZA PANNELLO} = 202 \text{ cm}$$

$$a = ?$$

CALCOLIAMO INNANZI TUTTO L'AREA DEL QUADRATO

$$A_q = l^2 = (5a+2)^2 = 25a^2 + 20a + 4$$

A QUESTO PUNTO FACENDO LA DIFFERENZA TRA L'AREA DEL PANNELLO  $A_p$  E L'AREA DEL QUADRATO  $A_q$  OTTENIAMO L'AREA DEL TRIANGOLO  $A_t$ :

$$\begin{aligned} A_t &= A_p - A_q = 30a^2 + 32a + 8 - (25a^2 + 20a + 4) = \\ &= 5a^2 + 12a + 4 \end{aligned}$$

SAPENDO CHE L'AREA DEL TRIANGOLO È UGUALE AL PRODOTTO



# DIVISIONE DI POLINOMI

DELLA SUA BASE PER LA SUA ALTEZZA DIVISO 2, CIOÈ

$$A_t = \frac{b_t \times h_t}{2}$$

DA QUESTA EQUAGLIANZA CALCOLIAMO L'ALTEZZA DEL TRIANGOLO  $h_t$ :

$$h_t = \frac{2 \times A_t}{b_t}$$

E VISTO CHE  $b_t = l_q = 5a + 2$ , ALLORA:

$$h_t = \frac{2 \times (5a^2 + 12a + 4)}{5a + 2}$$

CIOÈ

$$h_t = \frac{10a^2 + 24a + 8}{5a + 2}$$

OTTENENDO COSÌ LA DIVISIONE TRA 2 POLINOMI:

$$\begin{array}{r|l} 10a^2 + 24a + 8 & 5a + 2 \\ -10a^2 - 4a & 2a + 4 \\ \hline // + 20a + 8 & \\ -20a - 8 & \\ \hline // // & \end{array}$$

QUINDI

$$h_t = 2a + 4$$

A QUESTO PUNTO SAPENDO CHE L'ALTEZZA DEL PANNELLO  $h_p$  MISURA 202 CM ED È LA SOMMA DELL'ALTEZZA DEL QUADRATO  $h_q = l_q$  CON L'ALTEZZA



# DIVISIONE DI POLINOMI

DEL TRIANGOLO  $h_t$ :

$$h_p = h_q + h_t$$

$$202 = (5a+2) + (2a+4)$$

OBTENIAMO UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO NELLA  
INCOGNITA  $a$ , COSÌ

$$202 = 5a+2+2a+4$$

$$202 = 7a+6$$

$$196 = 7a$$

$$a = \frac{196}{7}$$

$$a = 28 \text{ cm}$$