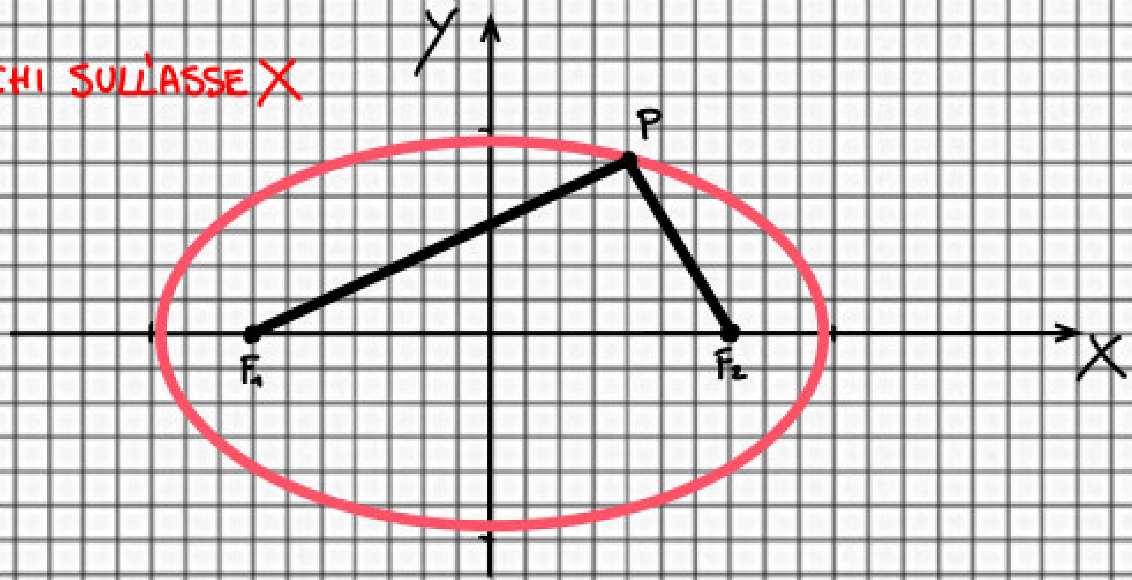
L'ELLISSE

É IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO TALI CHE LA SOMMA DELLE DISTANZE DA 2 PUNTI FISSI F_1 E F_2 DETTI FUOCHI, È COSTANTE.

FUOCHI SULL'ASSE X

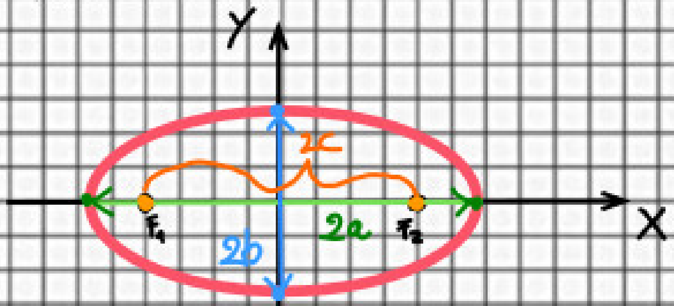


$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = \text{COSTANTE}$$

L'EQUAZIONE CANONICA (IN FORMA GENERALE) DI QUESTO TIPO DI CONICA È:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{DOVE } a > b$$

DA ESSA SI HA CHE



CIOÈ

$2a$ LUNGHEZZA ASSE MAGGIORE

$2b$ LUNGHEZZA ASSE MINORE

$2c$ DISTANZA FOCALE (DISTANZA TRA F_1 E F_2)

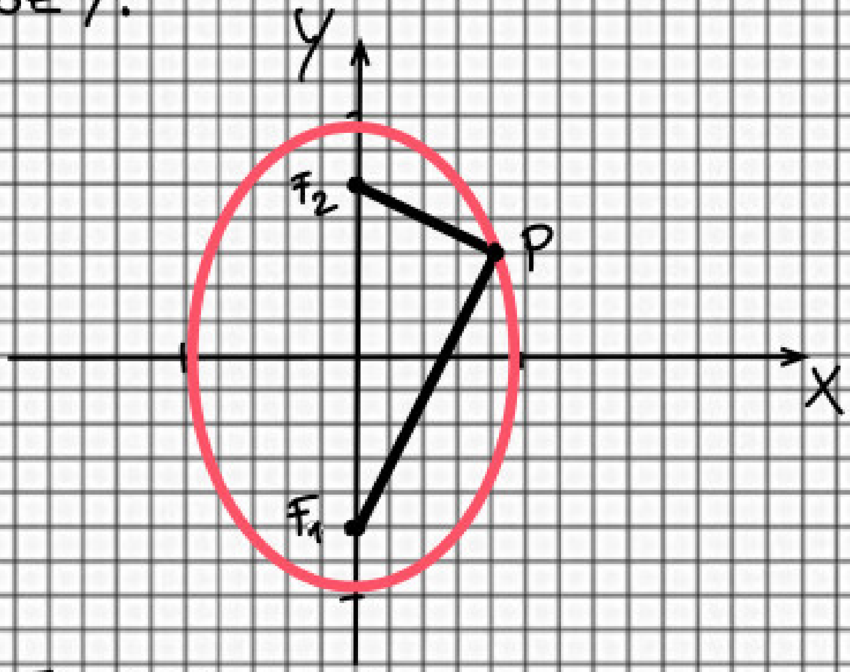
IN ESSA LA RELAZIONE TRA I PARAMETRI a, b E c È:

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}$$

MENTRE LE COORDINATE DEI FUOCHI SONO:

$$F_1(-c, 0) \qquad F_2(c, 0)$$

NEL CASO IN CUI I FUOCHI SI TROVANO SULL'ASSE Y:



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b = \text{COSTANTE}$$

L'EQUAZIONE CANONICA SARÀ SEMPRE:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{MA CON } a < b$$

IN ESSA SARÀ POI

2b LUNGHEZZA ASSE MAGGIORE
2a LUNGHEZZA ASSE MINORE
2c DISTANZA FOCALE

MENTRE LA RELAZIONE TRA I PARAMETRI a, b E c È:

$$\boxed{c^2 = b^2 - a^2}$$

MENTRE LE COORDINATE DEI FUOCHI SONO:

$$F_1(0, -c) \qquad F_2(0, c)$$

SI DEFINISCE ECCENTRICITÀ DELL'ELLISSE UN NUMERO COMPRESO TRA 0 ED 1, SE È PARI A 0 L'ELLISSE DEGENERA IN UNA CIRCONFERENZA MENTRE SE È PARI AD 1 DEGENERA IN UNA RETTA, ED È DATA DALL'ESPRESSIONE

$$e = \frac{c}{a} \text{ se } a > b \qquad e = \frac{c}{b} \text{ se } b > a$$

NOTA:

SE a=b L'ELLISSE DEGENERA IN UNA CIRCONFERENZA CON CENTRO NELL'ORIGINE E RAGGIO PARI AD a

$$x^2 + y^2 = a^2$$

PERCHÉ ESSENDO

$$c = a^2 - b^2 \qquad \text{OPPURE} \qquad c = b^2 - a^2$$

SE a=b, ALLORA

$$c = a^2 - b^2 = 0 \quad \text{OPPURE} \quad c = b^2 - a^2 = 0$$

E DI CONSEGUENZA L'ECCENTRICITÀ SARÀ

$$e = \frac{c}{a} = \frac{0}{a} = 0 \quad \text{OPPURE} \quad e = \frac{c}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

MAGGIORE È L'ECCENTRICITÀ, TANTO PIÙ L'ELLISSE SI ALLUNGA SUL SUO ASSE MAGGIORE.

RICERCA DELL'EQUAZIONE DI UNA ELLISSE

A EQUAZIONE NOTI I FUOCHI E IL SEMIASSE MAGGIORE

PARTENDO DALLA SUA DEFINIZIONE SAPPIAMO CHE LA SOMMA DELLE DISTANZE DI OGNI SUO PUNTO DAI FUOCHI È COSTANTE E PARI A:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \quad \text{oppure} \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$$

SE $a > b$

SI AVRÀ $P(x,y)$ $F_1(-c,0)$ E $F_2(c,0)$

COSÌ CALCOLANDO LE DISTANZE DAI FUOCHI SI HA

$$\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\cancel{4}a^2-\cancel{4}cx$$

$$a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx$$

$$\left(a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-cx\right)^2$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2\cancel{-2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4\cancel{-2a^2cx}+c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

MA $c^2=a^2-b^2$, COSÌ

$$a^2x^2+a^2(a^2-b^2)+a^2y^2=a^4+(a^2-b^2)x^2$$

$$\cancel{a^2x^2}+\cancel{a^4}-a^2b^2+a^2y^2=\cancel{a^4}+\cancel{a^2x^2}-b^2x^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

CIOÈ DIVIDENDO TUTTO PER a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

EQUAZIONE PASSANTE PER 2 PUNTI $A(x_1,y_1)$ E $B(x_2,y_2)$

PARTENDO DALL'EQUAZIONE IN FORMA CANONICA SI PONE

$$\alpha=\frac{1}{a^2} \quad E \quad \beta=\frac{1}{b^2}$$

IN MODO CHE LA SI PUÒ RISCRIVERE COME

$$\alpha x^2+\beta y^2=1$$

SI SCRIVE IL SISTEMA IMPONENDO PRIMA IL PASSAGGIO PER IL PUNTO A E POI PER IL PUNTO B

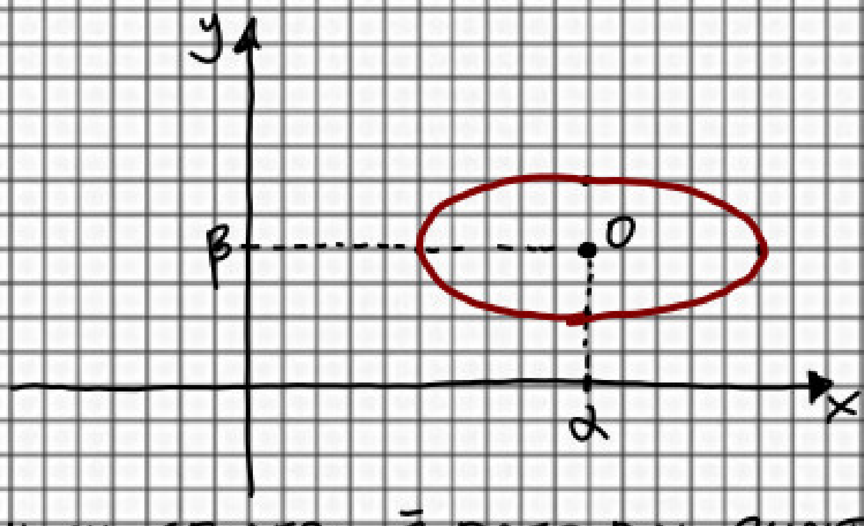
$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 = 1 & \text{PASSAGGIO PER A} \\ \alpha x_2 + \beta y_2 = 1 & \text{PASSAGGIO PER B} \end{cases}$$

DALLE SOLUZIONI DEL SISTEMA α E β SI RICAVANO POI a^2 E b^2

$$a^2 = \frac{1}{\alpha} \qquad b^2 = \frac{1}{\beta}$$

ELLISSE TRASLATA

SI DICE TRASLATA QUELL'ELLISSE IN CUI GLI ASSI DEL SUO SISTEMA DI RIFERIMENTO SONO PARALLELI AGLI ASSI CARTESIANI X E Y.



IL SUO CENTRO È DATO DAL PUNTO $O(\alpha, \beta)$ E LA SUA EQUAZIONE È

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$