EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

(1)

LE EQUAZIONI AD UNA INCOGNITA, IN CUI LA INCOGNITA COMPARE CON ESPONENTE DI GRADO 2, SONO DETTE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO AD UNA INCOGNITA.
LA FORMA GENERALE CON CUI QUESTE VENGONO INDICATE È:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

DOVE "a" È IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 2° GRADO (L'INCOGNITA CON ESPONENTE 2...), "b" È IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 1° GRADO (L'INCOGNITA CON ESPONENTE 1...) E "c" È IL TERMINE NOTO (DETTO ANCHE TERMINE DI GRADO Ø).
QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SI DIVIDONO IN DUE TIPI:

- EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE
- EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE

NELL'INSIEME DEI NUMERI REALI, IN ENTRAMBI I CASI, SE L'EQUAZIONE È RISOLVIBILE, CIOÈ NON È IMPOSSIBILE, AMMETTE SEMPRE 2 SOLUZIONI (DETTE ANCHE ZERI DELL'EQUAZIONE) CIOÈ 2 VALORI CHE SE SOSTITUITI ALLA X, RENDONO VERA L'EQUAZIONE STESSA, NEL SENSO CHE IL PRIMO MEMBRO DIVENTA PROPRIO UGUALE A ZERO.

EQUAZIONI DI 2° GRADO IN UNA INCOGNITA INCOMPLETE

IN QUESTO TIPO DI EQUAZIONI O È PRESENTE IL TERMINE DI 1° GRADO (L'INCOGNITA CON ESPONENTE 1) OPPURE È PRESENTE IL TERMINE NOTO, OPPURE SONO ASSENTI ENTRAMBI.
CIOÈ:

$$\boxed{1)\quad ax^2 + c = 0 \qquad \text{DETTA EQUAZIONE PURA}}$$

IN QUESTO CASO MANCA IL TERMINE DI 1° GRADO E LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO MEDIANTE

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

SEMPLICI PASSAGGI ALGEBRICI:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

DAL RADICALE ALGEBRICO:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} = \begin{cases} \boxed{x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}} \\ \boxed{x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}} \end{cases}$$

DALLE 2 SOLUZIONI SI EVIDENZIA IMMEDIATAMENTE CHE SE a e c HANNO LO STESSO SEGNO, ALLORA L'EQUAZIONE SI DICE IMPOSSIBILE IN $\mathbb{R}$ (CIOÈ NON AMMETTE SOLUZIONI REALI) MA 2 SOLUZIONI COMPLESSE.

ESEMPIO:

i) $3x^2 - 6 = 0$

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{3} = 2 \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{2} = \begin{cases} \boxed{x_1 = \sqrt{2}} \\ \boxed{x_2 = -\sqrt{2}} \end{cases}$$

ii) $-4x^2 + 16 = 0$

$$-4x^2 = -16$$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{4} = 4 \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} \boxed{x_1 = 2} \\ \boxed{x_2 = -2} \end{cases}$$

iii) $5x^2 + 10 = 0$

$$5x^2 = -10$$

$$x^2 = -\frac{10}{5} = -2 \qquad \boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{-2}}$$

SOLUZIONI COMPLESSE (IMPOSSIBILE IN $\mathbb{R}$)

$\boxed{2)\ ax^2+bx=0}$ DETTA EQUAZIONE SPURIA

IN QUESTO CASO MANCA IL TERMINE NOTO, E LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO MEDIANTE IL RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE:

$$\boxed{x}\boxed{(ax+b)}=0$$

PER LA LEGGE DELL'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO PONIAMO ENTRAMBI I FATTORI UGUALE A Ø (ZERO),

$\boxed{x=0}$ CHE È GIÁ LA PRIMA SOLUZIONE, $\boxed{x_1=0}$

$\boxed{ax+b=0}$ CHE È UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA

QUINDI:

$$ax=-b$$

$\boxed{x=-\frac{b}{a}}$ CHE È LA SECONDA SOLUZIONE $\boxed{x_2=-\frac{b}{a}}$

ESEMPIO:

i) $2x^2-5x=0$

$$x(2x-5)=0$$

$$\boxed{x_1=0}$$

$$2x-5=0$$

$$2x=5$$

$x=\frac{5}{2}$ $\boxed{x_2=\frac{5}{2}}$

ii) $3x^2+9x=0$

$$x(3x+9)=0$$

$$\boxed{x_1=0}$$

$3x+9=0$ $3x=-9$ $\boxed{x_2=-\frac{9}{3}=-3}$

3) $ax^2 = 0$ DETTA EQUAZIONE MONOMIA

IN QUESTO CASO MANCANO SIA IL TERMINE DI 1° GRADO CHE IL TERMINE NOTO, E LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO CONSIDERANDO CHE:

$a \neq 0$ ALTRIMENTI L'EQUAZIONE NON ESISTEREBBE

ALLORA IL PRODOTTO È UGUALE A Ø (ZERO) SE E SOLTANTO SE

$$x^2 = 0$$

$$\boxed{x_{1,2} = 0}$$

CIOÈ LE SOLUZIONI DI QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SONO SEMPRE NULLE.

EQUAZIONI DI 2° GRADO IN UNA INCOGNITA COMPLETE

IN QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SONO PRESENTI TUTTI I TERMINI E L'EQUAZIONE SI PRESENTA NELLA CANONICA FORMA:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

DOVE SAPPIAMO CHE $a \neq 0$ ALTRIMENTI NON SAREBBE DI 2° GRADO.

IN QUESTO CASO LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO MEDIANTE LA COSIDDETTA "FORMULA RISOLUTIVA DELLE EQUAZIONI DI 2° GRADO" (DETTA ANCHE FORMULA DEL DELTA).

INDICANDO CON LA LETTERA GRECA MAIUSCOLA Δ (DELTA) DETTO ANCHE DISCRIMINANTE, LA FORMULA RISOLUTIVA È:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

DOVE:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

È CIOÈ: 2

$$\boxed{X_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad \boxed{X_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

IL DELTA VIENE DETTO DISCRIMINANTE, PERCHÉ IN BASE AL SUO SEGNO (POSITIVO, NEGATIVO O NULLO) SI OTTENGONO 3 TIPI DIVERSI DI SOLUZIONI.

⇒ DISCRIMINANTE PERCHÉ DISCRIMINA LE SOLUZIONI

1) DELTA POSITIVO ($\Delta > 0$)

SI OTTERRANNO 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE

2) DELTA NULLO ($\Delta = 0$)

SI OTTERRANNO 2 SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI (UGUALI)

3) DELTA NEGATIVO ($\Delta < 0$)

EQUAZIONE IMPOSSIBILE NELL'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$
NESSUNA SOLUZIONE REALE MA 2 SOLUZIONI COMPLESSE

ESEMPIO:

i) $x^2-7x+10=0 \qquad a=1 \quad b=-7 \quad c=10$

$\boxed{\Delta} = b^2-4ac = (-7)^2-4(1)(10) =$
$= 49-40 \boxed{=9}$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE

$$X_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm 3}{2}$$

$$\boxed{X_1 = 2} \qquad \boxed{X_2 = 5}$$

ii) $25x^2 - 20x + 4 = 0$ $\quad a=25 \quad b=-20 \quad c=4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4) =$

$= 400 - 400 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 25} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$\boxed{x_1 = \frac{2}{5}}$ $\quad \boxed{x_2 = \frac{2}{5}}$

iii) $3x^2 - x + 1 = 0$ $\quad a=3 \quad b=-1 \quad c=1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(1) =$

$= 1 - 12 = -11$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZIONI COMPLESSE

NESSUNA SOLUZIONE REALE!

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA RISOLUTIVA

UNA DOMANDA CHE CI POSSIAMO PORRE È:
"DA DOVE ESCE LA FORMULA RISOLUTIVA DELLE EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE?"
CERCHIAMO DI DARE UNA RISPOSTA, PARTENDO DALL'ESPRESSIONE GENERALE:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

E MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER IL TERMINE $4a$, CIOÈ

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$4a(ax^2+bx+c) = 4a \cdot 0$$

QUINDI OTTENIAMO

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

A QUESTO PUNTO SOMMIAMO AD ENTRAMBI I MEMBRI IL TERMINE b^2 CIOÈ

$$4a^2x^2+4abx+4ac+b^2=0+b^2$$

DOVE, CAMBIANDO LEGGERMENTE L'ORDINE, OTTENIAMO:

$$4a^2x^2+4abx+b^2+4ac=b^2$$

I PRIMI 3 TERMINI DEL PRIMO TERMINE RAPPRESENTANO IL QUADRATO DI UN BINOMIO, QUINDI POSSIAMO RISCRIVERE TUTTO COME:

$$(2ax+b)^2+4ac=b^2$$

CIOÈ

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

CONSIDERANDO IL RADICALE ALGEBRICO COME INVERSO DEL QUADRATO OTTENIAMO:

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

COSÌ:

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

E:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

PROPRIETÀ

SE IN UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO DELTA È POSITIVO ($\text{CIOÈ } \Delta \geq 0$), POSSIAMO SFRUTTARE LA RELAZIONE CHE ESISTE TRA LA SOMMA ED IL PRODOTTO DELLE SOLUZIONI ED I COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE.

CONSIDERIAMO LA GENERICA EQUAZIONE DI 2° GRADO

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

SE

$$\boxed{\Delta \geq 0}$$

INDICANDO CON S LA SOMMA E P IL PRODOTTO DELLE SUE 2 SOLUZIONI REALI SI HA CHE:

$$\boxed{S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}} \quad \text{E} \quad \boxed{P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$$

IN MODO CHE L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

PERCHÉ

$$x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

E MOLTIPLICANDO TUTTO PER a SI OTTIENE

$$ax^2+bx+c=0$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

DIMOSTRAZIONE DELLE RELAZIONI

SAPPIAMO CHE:

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad E \quad X_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

SOMMA

CALCOLIAMO LA SOMMA

$$\boxed{X_1+X_2=}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-b-\cancel{\sqrt{b^2-4ac}}-b+\cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=\boxed{-\frac{b}{a}}$$

PRODOTTO

CALCOLIAMO IL PRODOTTO

$$\boxed{X_1\cdot X_2=}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}=$$

IL NUMERATORE È LA SOMMA PER LA DIFFERENZA DI DUE MONOMI CHE DAI PRODOTTI NOTEVOLI SAPPIAMO ESSERE UGUALE ALLA DIFFERENZA DEI QUADRATI, COSÍ

$$=\frac{[b^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2]}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}}=\boxed{\frac{c}{a}}$$

REGOLA DI CARTESIO

IN UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO SE DELTA È POSITIVO (CIOÈ $\Delta \geq 0$), SFRUTTANDO LA SUCCESSIONE DEI SEGNI DEI COEFFICIENTI a, b, c POSSIAMO DETERMINARE IL SEGNO DELLE SUE SOLUZIONI CONSIDERANDO CHE AD OGNI PERMANENZA DI SEGNO CORRISPONDE UNA SOLUZIONE NEGATIVA MENTRE AD OGNI VARIAZIONE DI SEGNO CORRISPONDE UNA SOLUZIONE POSITIVA, CIOÈ

$$\underbrace{+ax^2+}_{\text{PERMANENZA}}\underbrace{bx-}_{\text{VARIAZIONE}}c=0$$

PERMANENZA SOLUZIONE NEGATIVA

VARIAZIONE SOLUZIONE POSITIVA

ESEMPI

1) $x^2-5x+6=0$

VAR VAR

2 SOLUZIONI POSITIVE $(x_1=2;\ x_2=3)$

2) $x^2+18x+72=0$

PERM PERM

2 SOLUZIONI NEGATIVE $(x_1=-12;\ x_2=-6)$

3) $x^2+x-2=0$

PERM VAR

1 SOLUZIONE NEGATIVA
1 SOLUZIONE POSITIVA
$(x_1=-1;\ x_2=2)$