EQUAZIONI 2° GRADO PARAMETRICHE

COME VISTO PER QUELLE DI 1° GRADO, IN QUESTE EQUAZIONI, OLTRE ALLA INCOGNITA (O ALLE ...) COMPAIONO ALTRE LETTERE CHE NELLA RISOLUZIONE SI POSSONO CONSIDERARE COSTANTI, MA PER LE QUALI È NECESSARIA UNA DISCUSSIONE.
SUPPONIAMO AD ESEMPIO CHE LA NOSTRA EQUAZIONE SIA NEL PARAMETRO K E CIOÈ:

$$\underbrace{(K+6)}_{a}x^2+\underbrace{(K-2)}_{b}x+\underbrace{K+3}_{c}=0$$

COME POSSIAMO VEDERE I SUOI COEFFICIENTI DIPENDONO DA K E PIÙ PRECISAMENTE

$a=K+6 \qquad b=K-2 \qquad c=K+3$

SE AD ESEMPIO K ASSUME IL VALORE -6, CIOÈ SE $K=-6$, ALLORA

$a=-6+6=0 \qquad b=-6-2=-8 \qquad c=-6+3=-3$

IL COEFFICIENTE "a" DIVENTA NULLO E LA STESSA EQUAZIONE DI 2° GRADO PERDEREBBE DI SIGNIFICATO DIVENTANDO DI FATTO UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO.

SE INVECE $K=2$

$a=2+6=8 \qquad b=2-2=0 \qquad c=2+3=5$

IL COEFFICIENTE "b" DIVENTA NULLO E L'EQUAZIONE DA COMPLETA DIVENTA PURA.

SE INVECE $K=-3$

$a=-3+6=3 \qquad b=-3-2=-5 \qquad c=-3+3=0$

IL COEFFICIENTE "C" SI ANNULLA E L'EQUAZIONE DIVENTA SPURIA.

SUPPONIAMO QUINDI DI VOLERLA RISOLVERE COME EQUAZIONE DI 2° GRADO.

LA PRIMA OSSERVAZIONE DA FARE SUL PARAMETRO K È CHE NON POTRÀ ESSERE PARI A −6, PERCHÉ COME ABBIAMO VISTO SE IL COEFFICIENTE "a" È NULLO NON È UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO, QUINDI

$$K \neq -6$$

COSÌ SE CALCOLIAMO Δ (DELTA) CONSIDERANDO K COSTANTE OTTENIAMO:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{CIOÈ} \quad \Delta = (k-2)^2 - 4(k+6)(k+3)$$

$$\Delta = k^2 + 4 - 4k - 4(k^2 + 3k + 6k + 18)$$

$$\Delta = k^2 + 4 - 4k - 4k^2 - 12k - 24k - 72$$

$$\Delta = -3k^2 - 40k - 68$$

CIOÈ UNA NUOVA EQUAZIONE DI 2° GRADO NELLA QUALE K È L'INCOGNITA.

A QUESTO PUNTO UNA ULTERIORE OSSERVAZIONE SU K CHE SI POTREBBE FARE AD ESEMPIO È QUELLA CHE SE $\Delta = 0$, COME SAPPIAMO, LA NOSTRA EQUAZIONE PARAMETRICA AVRÀ 2 SOLUZIONI COINCIDENTI, QUINDI RISOLVENDO

$$\Delta = 0 \implies -3k^2 - 40k - 68 = 0$$

POSSIAMO TROVARE I VALORI DI K PER I QUALI LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE SIANO COINCIDENTI (UGUALI).

OPPURE SFRUTTANDO LE PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI TRA I COEFFICIENTI a, b, c POSSIAMO DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ LA SOMMA DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE PARAMETRICA SIA UGUALE AD UN DATO NUMERO N, PERCHÉ SAPENDO CHE SE ABBIAMO

$$ax^2 + bx + c = 0$$

CON

$$\Delta \geq 0$$

ALLORA

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

SOMMA DELLE SOLUZIONI

QUINDI IMPONENDO I VALORI DI K AFFINCHÉ $\Delta \geq 0$, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE IN K

$$-\frac{b}{a} = \text{NUMERO } N$$

CHE NEL NOSTRO ESEMPIO SARÀ

$$-\frac{(K+6)}{K-2} = \text{NUMERO } N$$

IN CONCLUSIONE QUINDI, AL COSPETTO DI UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO PARAMETRICA, BISOGNA CONSIDERARE I SUOI COEFFICIENTI E LE LORO RELAZIONI FACENDO LE DOVUTE OSSERVAZIONI SUL (O SUI..) PARAMETRO/I IN ESSI CONTENUTI.

PARTENDO QUINDI DALLA FORMA NORMALE DI UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0$$

SE I COEFFICIENTI a, b, c DIPENDONO DA UNO O PIÙ PARAMETRI REALI LA RISOLUZIONE E LA DISCUSSIONE PREVEDONO DI RAGIONARE PER CASI SEGUENDO UN ORDINE PRECISO.

1 - SE IL COEFFICIENTE a DEL TERMINE DI 2° GRADO È PARAMETRICO SE NE STUDIA L'ANNULLAMENTO PERCHÉ SE $a=0$ L'EQUAZIONE DIVENTA DI 1° GRADO ED INDIVIDUIAMO QUINDI I VALORI PER CUI RISULTA

$$a \neq 0$$

2 - CONSIDERIAMO L'ESPRESSIONE DI DELTA

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

CHE DIPENDERÀ DAL O DAI PARAMETRI SAPENDO CHE

- IL VALORE DEL O DEI PARAMETRI PER CUI RISULTA $\Delta \geq 0$ GARANTISCONO CHE L'EQUAZIONE AMMETTE 2 SOLUZIONI REALI (DISTINTE O COINCIDENTI).
- IL VALORE DEL O DEI PARAMETRI PER CUI RISULTA $\Delta < 0$ RENDONO L'EQUAZIONE IMPOSSIBILE PERCHÉ NON AMMETTE SOLUZIONI REALI.

COSÌ NELLA RISOLUZIONE DI EVENTUALI QUESITI PROPOSTI DETERMINATI I VALORI DEL O DEI PARAMETRI, SE PER QUESTI VALORI $\Delta < 0$, ALLORA TALI VALORI SARANNO NON ACCETTABILI.

TABELLA CONDIZIONI DI RISOLUZIONE

CONDIZIONE	SOLUZIONE
DETERMINARE QUANDO UNA RADICE È UGUALE A Ø (ZERO)	SOSTITUIRE NELL'EQUAZIONE $x=0$
LA SOMMA DELLE RADICI È UGUALE AD UN NUMERO N	$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a}=N$
IL PRODOTTO DELLE RADICI È UGUALE AD UN NUMERO N	$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=N$
LE RADICI SONO OPPOSTE $x_1=-x_2$	$x_1+x_2=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$
LE RADICI SONO RECIPROCHE $x_1=\frac{1}{x_2}$	$x_1 \cdot x_2=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a$
LE RADICI SONO ANTIRECIPROCHE $x_1=-\frac{1}{x_2}$	$x_1 \cdot x_2=-1 \Rightarrow \frac{c}{a}=-1 \Rightarrow c=-a$
LE RADICI SONO CONCORDI	$x_1 \cdot x_2>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow c>a$
LE RADICI SONO DISCORDI	$x_1 \cdot x_2<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow c<a$
LE RADICI SONO COINCIDENTI $x_1=x_2$	$\Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=0$
LE RADICI SONO REALI	$\Delta\geq 0 \Rightarrow b^2-4ac\geq 0$
LE RADICI SONO REALI E DISTINTE	$\Delta>0 \Rightarrow b^2-4ac>0$
LE RADICI NON SONO REALI	$\Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0$

L'EQUAZIONE È PURA $ax^2+c=0$	$b=0$
L'EQUAZIONE È SPURIA $ax^2+bx=0$	$c=0$
LA SOMMA DEI RECIPROCI DELLE RADICI È UGUALE A UN NUMERO N	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=N \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=N \Rightarrow -\frac{b}{c}=N$
LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE RADICI È UGUALE A UN NUMERO N	$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=N \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=N$
LA SOMMA DEI QUADRATI DEI RECIPROCI DELLE RADICI È UGUALE AD N	$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=N \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=N\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2$
LA SOMMA DEI CUBI DELLE RADICI È UGUALE AD N	$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=N \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=N$
LA SOMMA DEI CUBI DEI RECIPROCI DELLE RADICI È UGUALE AD N	$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3\cdot x_2^3}=N \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=N\left(\frac{c}{a}\right)^3$
UNA RADICE È MULTIPLA DELL'ALTRA SECONDO UN FATTORE N	$\begin{cases} x_1=N\cdot x_2 \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI

1 DETERMINARE K AFFINCHÉ L'EQUAZIONE AMMETTA RADICI REALI E COINCIDENTI

$$x^2-x+k=0$$

SAPPIAMO CHE DEVE ESSERE

$$\Delta=0$$

QUINDI ESSENDO $a=1$ $b=-1$ $c=k$

ALLORA

$$\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4(1)\cdot(k)=1-4k=0$$

$$4k=1 \Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{4}}$$

2 DETERMINARE K AFFINCHÉ L'EQUAZIONE AMMETTA RADICI REALI E COINCIDENTI

$$(k+6)x^2+(k-2)x+k+3=0$$

$$a=(k+6) \quad b=(k-2) \quad c=(k+3)$$

C.E. $a\neq 0 \Rightarrow k+6\neq 0 \Rightarrow k=-6$

$$\Delta=0 \Rightarrow b^2-4ac=(k-2)^2-4(k+6)\cdot(k+3)=0$$

$$k^2+4-4k+(-4k-24)(k+3)=0$$

$$k^2+4-4k+(-4k^2-12k-24k-72)=0$$

$$k^2+4-4k-4k^2-12k-24k-72=0$$

$$-3k^2-40k-68=0$$

$$3k^2+40k+68=0$$ EQ. 2° GRADO IN K

$$\Delta=b^2-4ac=(40)^2-4(3)(68)=$$

$$=1600-816=784$$

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-40\pm\sqrt{784}}{6}=$$

$$=\frac{-40\pm 28}{6}= \begin{cases} \frac{-40-28}{6}=-\frac{\cancel{68}^{34}}{\cancel{6}_{3}} \\ \frac{-40+28}{6}=-\frac{\cancel{12}^{2}}{\cancel{6}_{1}} \end{cases}$$

$$\boxed{k_1=-\frac{34}{3} \quad k_2=-2}$$

3 DATA LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$x^2-x-k-1=0$$

a) DETERMINARE K IN MODO CHE $x_1=2$
b) DETERMINARE L'ALTRA RADICE

a) SOSTITUIAMO $x=2$ NELL'EQUAZIONE

$$2^2-2-k-1=0 \Rightarrow 4-2-1-k=0$$

$$1-k=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

b) CONSIDERIAMO $k=1$

$$x^2-x-1-1=0 \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$a=1 \quad b=-1 \quad c=-2$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$ SAPENDO CHE $x_1=2$

$$2+x_2=-\frac{-1}{1} \Rightarrow 2+x_2=1 \Rightarrow \boxed{x_2=-1}$$

4 DATA LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$(k+2)x^2-2(k-3)x+k^2-1=0$$

C.E. $x+2\neq0$ $x\neq-2$

a) DETERMINARE K IN MODO CHE $x_1=0$
b) DETERMINARE L'ALTRA RADICE

a) $$\cancel{(k-2)\cdot 0^2}-\cancel{2\cdot(k-3)\cdot 0}+k^2-1=0$$

$$k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow \boxed{k_1=-1 \quad k_2=+1}$$

b) CONSIDERIAMO PRIMA $K=-1$

$$(-1+2)x^2-2(-1-3)x+\cancel{(-1)^2}-\cancel{1}=0$$

$$x^2+8x=0 \qquad a=1 \qquad b=8$$

$$x_1=0 \qquad x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x_2=-8}$$

E POI $K=+1$

$$(+1+2)x^2-2(+1-3)x+\cancel{(1)^2}-\cancel{1}=0$$

$$3x^2+4x=0 \qquad a=3 \qquad b=4$$

$$x_1=0 \qquad x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x_2=-\frac{4}{3}}$$

5 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI RECIPROCHE

$$(k+1)x^2-5x+2k=0$$

$$a=k+1 \qquad b=-5 \qquad c=2k$$

C.E. $a\neq 0 \Rightarrow k+1\neq 0 \Rightarrow k\neq -1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(k+1)2k=$$

$$=25-8k^2-8k=-8k^2-8k+25$$

RADICI RECIPROCHE

$$x_1=\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1\cdot x_2=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a$$

CIOÈ

$2k=k+1 \Rightarrow 2k-k=1 \Rightarrow \boxed{k=1}$ ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(1)>0$

INFATTI

$$\Delta = -8k^2 - 8k + 25 = -8(1)^2 - 8(1) + 25 =$$
$$= -8 - 8 + 25 = -16 + 25 = +9 > 0$$

6 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI RECIPROCHE

$$(k+3)x^2 - (4k-1)x + 3(k-1) = 0$$

$a = k+3 \quad b = 1-4k \quad c = 3k-3$

C.E. $a \neq 0 \Rightarrow k+3 \neq 0 \Rightarrow k \neq -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1-4k)^2 - 4(k+3)(3k-3) =$$
$$= 16k^2 - 8k + 1 - 12k^2 + 12k - 36k + 36 =$$
$$= 4k^2 - 32k + 37$$

RADICI RECIPROCHE

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$$

$$3k-3 = k+3 \Rightarrow 3k-k = 3+3 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{2}$$

$\boxed{k = 3}$ NON ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(3) < 0$

INFATTI

$$\Delta = 4k^2 - 32k + 37 = 4(3)^2 - 32(3) + 37 =$$
$$= 36 - 96 + 37 = -60 + 37 = -23 < 0$$

7 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE 2 RADICI RECIPROCHE

$$3x^2 - 2(k+1)x + k + 1 = 0$$

$a = 3 \quad b = -2k-2 \quad c = k+1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2k-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (k+1) =$$
$$= 4k^2 + 8k + 4 - 12k - 12 =$$
$$= 4k^2 - 4k - 8 = k^2 - k - 8$$

RADICI RECIPROCHE

$c = a \Rightarrow k+1=3 \Rightarrow \boxed{k=2}$ ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(2) \geq 0$

INFATTI

$$\Delta = 4k^2 - 4k - 8 = 4(2)^2 - 4(2) - 8 =$$
$$= 16 - 8 - 8 = 0$$

8 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE RADICI OPPOSTE

$$2x^2 - (k+1)x + k = 0$$

$a=2 \quad b=-(k+1) \quad c=k$

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(k+1)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot k =$$
$$= k^2 + 2k + 1 - 8k = k^2 - 6k + 1$$

RADICI OPPOSTE

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$-(k+1) = 0 \Rightarrow -k-1=0$$

$\boxed{k=-1}$ ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(-1) > 0$

INFATTI

$$\Delta = k^2 - 6k + 1 = (-1)^2 - 6(-1) + 1 = 1 + 6 + 1 = 8 > 0$$

9 DETERMINARE I VALORI DI K PER CUI LA SEGUENTE EQUAZIONE AMMETTE RADICI OPPOSTE

$$(k-2)x^2+2(k-6)x-4k-1=0$$

$a=k-2 \quad b=2(k-6) \quad c=-4k-1$

C.E. $a\neq 0 \Rightarrow k\neq 2$

$$\Delta=b^2-4ac=[2(k-6)]^2-4(k-2)(-4k-1)=$$
$$=4(k^2-12k+36)-4(-4k^2-k+8k+2)=$$
$$=4k^2-48k+144+16k^2-28k-8=$$
$$=20k^2-76k+136=5k^2-19k+34$$

RADICI OPPOSTE

$$x_1=-x_2 \Rightarrow x_1+x_2=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$$

$$2(k-6)=0 \Rightarrow 2k-12=0$$

$2k=12 \Rightarrow k=\frac{\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{k=6}$ ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(6)>0$

INFATTI

$$\Delta=5k^2-19k+34=5(6)^2-19(6)+34=5\cdot 36-19\cdot 6+34=$$
$$=180-114+34=100>0$$

10 DETERMINARE I VALORI DI K CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI ASSEGNATE PER LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$x^2+kx+1=0$$

a) LE RADICI SIANO REALI E COINCIDENTI

b) LE RADICI SIANO OPPOSTE

c) IL PRODOTTO DELLE RADICI SIA 1

d) LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE RADICI SIA 7

a) $\Delta = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$k^2 - 4 = 0$

$k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \boxed{k = \pm 2}$

b) $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow \boxed{k = 0}$ NON ACCETTABILE PERCHÉ $\Delta(0) < 0$

$\Delta = k^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4 < 0$

c) $x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$

$1 = 1 \ \forall k$ PER CUI $\Delta \geq 0$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow \boxed{k \leq -2 \vee k \geq 2}$

d) SOMMA DEI QUADRATI DELLE RADICI UGUALE A 7

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 7$

$(-k)^2 - 2 \cdot 1 = 7 \Rightarrow k^2 = +2 + 7$

$k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \boxed{k = \pm 3}$ ACCETTABILI

INFATTI

$\Delta(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$

$\Delta(+3) = (+3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$