EQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLUBILI CON I LOGARITMI

ABBIAMO VISTO COME SIA RELATIVAMENTE SEMPLICE RISOLVERE LE EQUAZIONI ESPONENZIALI, UNA VOLTA RIDOTTE NELLA FORMA CANONICA.

GRAZIE AI LOGARITMI È POSSIBILE RISOLVERE QUELLE EQUAZIONI ESPONENZIALI DIFFICILMENTE RICONDUCIBILI ALLA FORMA CANONICA NELLE QUALI CIOÈ VI È UNA UGUAGLIANZA TRA POTENZE CON BASI DIVERSE COME AD ESEMPIO:

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{g(x)}}$$

MA NELL'IPOTESI CHE:

$$\boxed{a^{f(x)} > 0} \quad \text{E} \quad \boxed{b^{g(x)} > 0}$$

RISULTANO DEFINITI, CON $C > 0$ E $C \neq 1$:

$$\boxed{\log_c a^{f(x)}} \quad \text{E} \quad \boxed{\log_c b^{g(x)}}$$

E PER LA "BIUNIVOCITÀ" DELLA FUNZIONE LOGARITMO, È LECITO SCRIVERE CHE SE VALE:

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{g(x)}}$$

ALLORA È EQUIVALENTE SCRIVERE:

$$\boxed{\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)}}$$

CON $C > 0$.

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

ESEMPI

1) RISOLVERE L'EQUAZIONE ESPONENZIALE:

$$2^x = 3$$

APPLICHIAMO IL LOGARITMO NATURALE (FACILMENTE CALCOLABILE CON LA CALCOLATRICE...), COSÌ:

$$\ln 2^x = \ln 3$$

SFRUTTANDO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI:

$$x \cdot \ln 2 = \ln 3$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}5849\ldots\ldots}$$

2) $3^{x-1} = 7^{1+x}$

$$\log 3^{x-1} = \log 7^{1+x} \quad \text{(SEMPRE IL LOGARITMO NATURALE)}$$

$$(x-1)\log 3 = (1+x)\log 7$$

$$x\log 3 - \log 3 = \log 7 + x\log 7$$

$$x\log 3 - x\log 7 = \log 7 + \log 3$$

$$x(\log 3 - \log 7) = \log 7 + \log 3$$

$$\boxed{x = \frac{\log(7\cdot 3)}{\log\left(\frac{3}{7}\right)} = \frac{\log 21}{\log(3/7)} = -3{,}5932\ldots\ldots}$$

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

3

3) $2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-3}$

$$\ln 2^{x+3} = \ln\left(64 \cdot 3^{x-3}\right)$$

$$(x+3)\ln 2 = \ln 64 + \ln 3^{x-3}$$

$$x\ln 2 + 3\ln 2 = \ln 64 + (x-3)\ln 3$$

$$x\ln 2 = \ln 64 + x\ln 3 - 3\ln 3 - 3\ln 2$$

$$x\ln 2 - x\ln 3 = \ln 64 - 3\ln 3 - 3\ln 2$$

$$x(\ln 2 - \ln 3) = \ln 2^6 - 3\ln 3 - 3\ln 2$$

$$x = \frac{6\ln 2 - 3\ln 3 - 3\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} = \frac{3\ln 2 - 3\ln 3}{\ln 2 - \ln 3}$$

$$= \frac{3\cancel{(\ln 2 - \ln 3)}}{\cancel{\ln 2 - \ln 3}} = \boxed{3}$$

4) $15 + 4^x = 2^{x+3}$

$$15 + 4^x = 2^x \cdot 2^3$$

$$15 + 2^{2x} - 2^3 \cdot 2^x = 0$$

$$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0$$

PONIAMO $z = 2^x$ E $z^2 = 2^{2x}$ COSÌ:

$$z^2 - 8z + 15 = 0$$

EQUAZIONE DI 2° GRADO IN z:

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \frac{8-2}{2} = 3 \\ \frac{8+2}{2} = 5 \end{cases}$$

RICORDANDO CHE $z = 2^x$ ALLORA:

$$2^x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}5849\ldots}$$

$$2^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2{,}3219\ldots}$$

5) $\frac{2}{3^{2-x}} - 2 \cdot 5^{1+x} = 5^x - \frac{3}{3^{1-x}}$

$$\frac{2}{3^{2-x}} + \frac{3}{3^{1-x}} = 5^x + 2 \cdot 5^{1+x}$$

$$\frac{2}{3^2 \cdot 3^{-x}} + \frac{3}{3 \cdot 3^{-x}} = 5^x + 2 \cdot 5 \cdot 5^x$$

$$\frac{2 \cdot 3^x}{3^2} + \frac{\cancel{3} \cdot 3^x}{\cancel{3}} = 5^x + 10 \cdot 5^x$$

$$\frac{2}{9} \cdot 3^x + 3^x = (1+10)\, 5^x$$

$$\left(\frac{2}{9} + 1\right) 3^x = 11 \cdot 5^x$$

$$\frac{\cancel{11}}{9} 3^x = \cancel{11} \cdot 5^x$$

$$\frac{1}{9} 3^x = 5^x$$

$$\ln\left(\frac{1}{9}3^x\right) = \ln 5^x$$

$$\ln \frac{1}{9} + \ln 3^x = \ln 5^x$$

$$\cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln 9 + x\ln 3 = x \ln 5$$

$$x \ln 3 - x \ln 5 = \ln 9$$

$$x(\ln 3 - \ln 5) = \ln 3^2$$

$$\boxed{x = \frac{2\cdot \ln 3}{\ln 3 - \ln 5}}$$

6) $$4^{1-x}\cdot\frac{1}{3^{2x}} = \sqrt{4^{1+3x}}\cdot\frac{1}{6^{2+x}}$$

$$4^{1-x}\cdot 3^{-2x} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x}\cdot 6^{-2-x}$$

$$2^{2-2x}\cdot 3^{-2x} = 2^{1+3x}\cdot 6^{-2-x}$$

$$\ln\left(2^{2-2x}\cdot 3^{-2x}\right) = \ln\left(2^{1+3x}\cdot 6^{-2-x}\right)$$

$$\ln 2^{2-2x} + \ln 3^{-2x} = \ln 2^{1+3x} + \ln 6^{-2-x}$$

$$(2-2x)\ln 2 - 2x\ln 3 = (1+3x)\ln 2 + (-2-x)\ln 6$$

$$(2-2x)\ln 2 - (1+3x)\ln 2 - 2x\ln 3 = -2\ln 6 - x\ln 6$$

$$[(2-2x)-(1+3x)]\ln 2 - 2x\ln 3 + x\ln 6 = -2\ln 6$$

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

$$(1-5x)\ln 2 - \underline{2x\ln 3} + x\ln 2 + \underline{x\ln 3} = -2\ln 2 - 2\ln 3$$

$$\ln 2 - 5x\ln 2 - x\ln 3 + x\ln 2 = -2\ln 2 - 2\ln 3$$

$$-4x\ln 2 - x\ln 3 = -2\ln 2 - 2\ln 3 - \ln 2$$

$$x(-4\ln 2 - \ln 3) = -3\ln 2 - 2\ln 3$$

$$x = \frac{-3\ln 2 - 2\ln 3}{-4\ln 2 - \ln 3} = \frac{\cancel{-}(3\ln 2 + 2\ln 3)}{\cancel{-}(4\ln 2 + \ln 3)} =$$

$$= \frac{\ln 2^3 + \ln 3^2}{\ln 2^4 + \ln 3} = \frac{\ln 8 + \ln 9}{\ln 16 + \ln 3} = \frac{\ln(8\cdot 9)}{\ln(16\cdot 3)} = \boxed{\frac{\ln 72}{\ln 48}}$$

$\boxed{7)}$ $\dfrac{2^x \cdot 15}{1+2^3} = 40 \cdot 3^{x-4}$

$$\frac{2^x \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{9}_{3}} = 40 \cdot 3^{x-4}$$

$$\frac{2^x \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{\cancel{40}^{8}}{\cancel{5}} \cdot 3^{x-4}$$

$$2^x \cdot 3^{-1} = 2^3 \cdot 3^{x-4}$$

$$\ln 2^x + \ln 3^{-1} = \ln 2^3 + \ln 3^{x-4}$$

$$x\ln 2 - \ln 3 = 3\ln 2 + x\ln 3 - 4\ln 3$$

$$x\ln 2 - x\ln 3 = 3\ln 2 - 4\ln 3 + \ln 3$$

$$x(\ln 2 - \ln 3) = 3\ln 2 - 3\ln 3$$

$$\boxed{x = \frac{3\cancel{(\ln 2 - \ln 3)}}{\cancel{\ln 2 - \ln 3}} = 3}$$