

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

EQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLUBILI CON I LOGARITMI

ABBIAMO VISTO COME SIA RELATIVAMENTE SEMPLICE RISOLVERE LE EQUAZIONI ESPONENZIALI, UNA VOLTA RIDOTTE NELLA FORMA CANTONICA.

GRAZIE AI LOGARITMI È POSSIBILE RISOLVERE QUELLE EQUAZIONI ESPONENZIALI DIFFICILMENTE RICONDUCEBILI ALLA FORMA CANTONICA, NELLE QUALI CIOÈ VI È UNA UGUAGLIANZA TRA POTENZE CON BASI DIVERSE COME AD ESEMPIO:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

MA NELL'IPOTESI CHE:

$$a^{f(x)} > 0$$

E

$$b^{g(x)} > 0$$

RISULTANO DEFINITI, CON $c > 0$ E $c \neq 1$:

$$\log_c a^{f(x)}$$

E

$$\log_c b^{g(x)}$$

E PER LA "BIUNIVOCITÀ" DELLA FUNZIONE LOGARITMO, È LEGITTO SCRIVERE CHE SE VALE:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

ALLORA È EQUIVALENTE SCRIVERE:

$$\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)}$$

CON $c > 0$.

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

ESEMPI

1) RISOLVERE L'EQUAZIONE ESPONENZIALE:

$$2^x = 3$$

APPLICHIAMO IL LOGARITMO NATURALE (FACILMENTE CALCOLABILE CON LA CALCOLATRICE...), COSÌ:

$$\ln 2^x = \ln 3$$

STRUTTIAMO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI:

$$x \cdot \ln 2 = \ln 3$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849 \dots$$

2) $3^{x-1} = 7^{1+x}$

$$\log 3^{x-1} = \log 7^{1+x} \quad (\text{SERVIRE IL LOGARITMO NATURALE})$$

$$(x-1) \log 3 = (1+x) \log 7$$

$$x \log 3 - \log 3 = \log 7 + x \log 7$$

$$x \log 3 - x \log 7 = \log 7 + \log 3$$

$$x (\log 3 - \log 7) = \log 7 + \log 3$$

$$x = \frac{\log (7 \cdot 3)}{\log (\frac{3}{7})} = \frac{\log 21}{\log (\frac{3}{7})} = -3,5332 \dots$$

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

3

$$\textcircled{3)} \quad 2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-3}$$

$$\ln 2^{x+3} = \ln(64 \cdot 3^{x-3})$$

$$(x+3) \ln 2 = \ln 64 + \ln 3^{x-3}$$

$$x \ln 2 + 3 \ln 2 = \ln 64 + (x-3) \ln 3$$

$$x \ln 2 = \ln 64 + x \ln 3 - 3 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$x \ln 2 - x \ln 3 = \ln 64 - 3 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$x (\ln 2 - \ln 3) = \ln 2^6 - 3 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$x = \frac{6 \ln 2 - 3 \ln 3 - 3 \ln 2}{\ln 2 - \ln 3} = \frac{3 \ln 2 - 3 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}$$

$$= \frac{3(\ln 2 - \ln 3)}{\ln 2 - \ln 3} = \textcircled{3}$$

$$\textcircled{4)} \quad 15 + 4^x = 2^{x+3}$$

$$15 + 4^x = 2^x \cdot 2^3$$

$$15 + 2^{2x} - 2^3 \cdot 2^x = 0$$

$$2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 15 = 0$$

PONIAMO $z = 2^x$ E $z^2 = 2^{2x}$ COSTI:

$$z^2 - 8z + 15 = 0$$

EQUAZIONE DI 2° GRADO IN z :

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \frac{8-2}{2} = 3 \\ \frac{8+2}{2} = 5 \end{cases}$$

RICORDANDO CHE $z = 2^x$, ALLORA:

$$2^x = 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849 \dots$$

$$2^x = 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2,3219 \dots$$

$$5) \quad \frac{2}{3^{2-x}} - 2 \cdot 5^{1+x} = 5^x - \frac{3}{3^{1-x}}$$

$$\frac{2}{3^{2-x}} + \frac{3}{3^{1-x}} = 5^x + 2 \cdot 5^{1+x}$$

$$\frac{2}{3^2 \cdot 3^{-x}} + \frac{3}{3 \cdot 3^{-x}} = 5^x + 2 \cdot 5 \cdot 5^x$$

$$\frac{2 \cdot 3^x}{3^2} + \frac{3 \cdot 3^x}{3} = 5^x + 10 \cdot 5^x$$

$$\frac{2}{9} \cdot 3^x + 3^x = (1+10) 5^x$$

$$\left(\frac{2}{9} + 1\right) 3^x = 11 \cdot 5^x$$

$$\frac{11}{9} 3^x = 11 \cdot 5^x$$

$$\frac{1}{9} 3^x = 5^x$$

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

$$\ln\left(\frac{1}{3} 3^x\right) = \ln 5^x$$

$$\ln \frac{1}{3} + \ln 3^x = \ln 5^x$$

$$\ln 1 - \ln 3 + x \ln 3 = x \ln 5$$

$$x \ln 3 - x \ln 5 = \ln 3$$

$$x(\ln 3 - \ln 5) = \ln 3^2$$

$$x = \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln 3 - \ln 5}$$

6)

$$4^{1-x} \cdot \frac{1}{3^{2x}} = \sqrt{4}^{1+3x} \cdot \frac{1}{6^{2+x}}$$

$$4^{1-x} \cdot 3^{-2x} = 4^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x} \cdot 6^{-2-x}$$

$$2^{2-2x} \cdot 3^{-2x} = 2^{1+3x} \cdot 6^{-2-x}$$

$$\ln(2^{2-2x} \cdot 3^{-2x}) = \ln(2^{1+3x} \cdot 6^{-2-x})$$

$$\ln 2^{2-2x} + \ln 3^{-2x} = \ln 2^{1+3x} + \ln 6^{-2-x}$$

$$(2-2x) \ln 2 - 2x \ln 3 = (1+3x) \ln 2 + (-2-x) \ln 6$$

$$(2-2x) \ln 2 - (1+3x) \ln 2 - 2x \ln 3 = -2 \ln 6 - x \ln 6$$

$$[(2-2x) - (1+3x)] \ln 2 - 2x \ln 3 + x \ln 6 = -2 \ln 6$$

EQ. ESP. RISOLUBILI CON LOGARITMI

$$(1-5x) \ln 2 - 2x \ln 3 + x \ln 2 + x \ln 3 = -2 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$\ln 2 - 5x \ln 2 - x \ln 3 + x \ln 2 = -2 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$-4x \ln 2 - x \ln 3 = -2 \ln 2 - 2 \ln 3 - \ln 2$$

$$x(-4 \ln 2 - \ln 3) = -3 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$x = \frac{-3 \ln 2 - 2 \ln 3}{-4 \ln 2 - \ln 3} = \frac{-(3 \ln 2 + 2 \ln 3)}{-(4 \ln 2 + \ln 3)}$$

$$= \frac{\ln 2^3 + \ln 3^2}{\ln 2^4 + \ln 3} = \frac{\ln 8 + \ln 9}{\ln 16 + \ln 3} = \frac{\ln(8 \cdot 9)}{\ln(16 \cdot 3)} = \frac{\ln 72}{\ln 48}$$

7)

$$\frac{2^x \cdot 15}{1+2^x} = 40 \cdot 3^{x-4}$$

$$\frac{2^x \cdot 15^{\frac{5}{3}}}{8} = 40 \cdot 3^{x-4}$$

$$\frac{2^x \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{40}{8} \cdot 3^{x-4}$$

$$2^x \cdot 3^{-3} = 2^3 \cdot 3^{x-4}$$

$$\ln 2^x + \ln 3^{-3} = \ln 2^3 + \ln 3^{x-4}$$

$$x \ln 2 - \ln 3 = 3 \ln 2 + x \ln 3 - 4 \ln 3$$

$$x \ln 2 - x \ln 3 = 3 \ln 2 - 4 \ln 3 + \ln 3$$

$$x(\ln 2 - \ln 3) = 3 \ln 2 - 3 \ln 3$$

$$x = \frac{3(\ln 2 - \ln 3)}{\ln 2 - \ln 3} = 3$$