EQUAZIONI ESPONENZIALI

SI DICONO EQUAZIONI ESPONENZIALI, QUELLE EQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA FIGURA ALL'ESPONENTE DI QUALCHE POTENZA.

SI CHIAMA $\boxed{\text{FORMA CANONICA}}$ DELLE EQUAZIONI ESPONENZIALI L'UGUAGLIANZA:

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$

DOVE $a>0$ E $a \neq 1$

ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN "X", CHE È UN NUMERO REALE QUALSIASI.

DALLA FORMA CANONICA, SAPENDO CHE 2 POTENZE CON UGUALE BASE SONO UGUALI SE E SOLO SE SONO UGUALI GLI ESPONENTI, ALLORA

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$

È VERA SE E SOLO SE

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

DALLA QUALE RISOLVENDO IN X, SI TROVA LA O LE SOLUZIONI CHE RISOLVONO L'EQUAZIONE ESPONENZIALE DI PARTENZA.

ESEMPI

1) RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ESPONENZIALE:

$$3^x = 9$$

LA SI PORTA IN FORMA CANONICA:

$$3^x = 3^2$$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

E SI EGUAGLIANO GLI ESPONENTI:

$$\boxed{x=2}$$

E SI TROVA, IN QUESTO CASO, L'UNICA SOLUZIONE.

2) RISOLVERE L'EQUAZIONE

$$4^x=8$$

SI PORTA IN FORMA CANONICA

$$2^{2x}=2^3$$

E SI EGUAGLIANO GLI ESPONENTI:

$$2x=3$$

$$\boxed{x=\frac{3}{2}}$$

3) $\left(\frac{1}{10}\right)^{4x}=1000\cdot 10^{1-x}$

$$10^{-4x}=10^3\cdot 10^{1-x}$$

$$10^{-4x}=10^{3+1-x}$$

$$10^{-4x}=10^{4-x}$$

$$-4x=4-x$$

$$4x-x=-4$$

$$3x=-4$$

$$\boxed{x=-\frac{4}{3}}$$

4) $4^x-2^{2x+1}=2^{2x-1}-6$

$$4^x-2^{2x+1}-2^{2x-1}=-6$$

PER LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$4^x - 2^{2x}\cdot 2^1 - 2^{2x}\cdot 2^{-1} = -6$$

$$2^{2x} - 2^{2x}\,2 - 2^{2x}\left(\frac{1}{2}\right) = -6$$

$$2^{2x}\left(1-2-\frac{1}{2}\right) = -6$$

$$2^{2x}\left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

$$2^{2x} = -\cancel{6}^{2}\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right)$$

$$2^{2x} = 2^2$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = \frac{2}{2} = 1}$$

5) $9^x = 6 + 3^x$

$$(3^2)^x - 3^x = 6$$

SI PONE $\boxed{z = 3^x}$ DA CUI $z^2 = (3^x)^2 = (3^2)^x$ COSÌ

$$z^2 - z = 6$$

$$z^2 - z - 6 = 0 \qquad \Delta = 1 + 4\cdot 6 = 25 \qquad z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} z_1 = -2 \\ z_2 = 3 \end{cases}$$

RICORDANDO CHE ABBIAMO POSTO

$$z = 3^x$$

ALLORA

$-2 = 3^x$ IMPOSSIBILE PERCHÈ COME SAPPIAMO CHE LA FUNZIONE ESPONENZIALE RESTITUISCE SEMPRE UN NUMERO REALE POSITIVO E NON POTRÀ MAI ESSERE -2

E

$$3 = 3^x$$

$x = 1$ UNICA SOLUZIONE

EQUAZIONI ESPONENZIALI

6) $2^{\sqrt{x}+2}+2^{2-\sqrt{x}}=17$

$2^{\sqrt{x}}\cdot 2^2+2^2\cdot 2^{-\sqrt{x}}=17$

PONIAMO $\boxed{2^{\sqrt{x}}=z}$ SI HA:

$z\cdot 2^2+2^2\cdot\frac{1}{z}=17$

$4z+\frac{4}{z}=17$

$\frac{4z^2+4-17z}{\cancel{z}}=0$

$4z^2-17z+4=0 \qquad \Delta=289-4\cdot4\cdot4=225$

$z_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{225}}{2\cdot4}=\frac{17\pm\sqrt{5^2\cdot3^2}}{8}=\frac{17\pm5\cdot3}{8}=\frac{17\pm15}{8}$

$z_{1,2}= \begin{cases} z_1=\frac{1}{4} \\ z_2=4 \end{cases}$

RICORDANDO CHE $2^{\sqrt{x}}=z$, ALLORA

$2^{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$

$2^{\sqrt{x}}=2^{-2}$

$\boxed{\sqrt{x}=-2 \qquad \text{IMPOSSIBILE X LA DEFINIZIONE DI RADICALE}}$

E

$2^{\sqrt{x}}=4$

$2^{\sqrt{x}}=2^2$

$\sqrt{x}=2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2=2^2 \Rightarrow \boxed{x=4 \quad \text{UNICA SOLUZIONE}}$

7) $\dfrac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}$

$\dfrac{2^x \cdot 2^2}{3} = 3^x \cdot 3^1 \Rightarrow \cancel{3} \cdot \dfrac{2^x \cdot 4}{\cancel{3}} = 3 \cdot 3^1 \cdot 3^x$

$\Rightarrow 4 \cdot 2^x = 9 \cdot 3^x \Rightarrow 2^x = \dfrac{9}{4} \cdot 3^x \Rightarrow \dfrac{2^x}{3^x} = \dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{3^2}{2^2} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

$\Rightarrow \boxed{x = -2}$

8) $2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-3}$

$2^{x+3} = 2^6 \cdot 3^{x-3} \Rightarrow \dfrac{2^{x+3}}{2^6} = 3^{x-3}$

$\Rightarrow 2^{x+3-6} = 3^{x-3} \Rightarrow 2^{x-3} = 3^{x-3}$

$\Rightarrow \dfrac{2^{x-3}}{3^{x-3}} = \cancel{\dfrac{3^{x-3}}{3^{x-3}}} \Rightarrow \dfrac{2^{x-3}}{3^{x-3}} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0$

$\Rightarrow x - 3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 3}$