EQUAZIONI LOGARITMICHE

1

SI DICONO EQUAZIONI LOGARITMICHE QUELLE EQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA FIGURA NELL'ARGOMENTO DI UNO O PIÙ LOGARITMI.
VISTO CHE IL DOMINIO DI UN'EQUAZIONE È L'INSIEME DEI VALORI CHE PUÒ ASSUMERE L'INCOGNITA, PER I QUALI L'EQUAZIONE STESSA HA SIGNIFICATO, IN UNA EQUAZIONE LOGARITMICA BISOGNA TENER PRESENTE CHE GLI ARGOMENTI DI TUTTI I LOGARITMI PRESENTI DEVONO ESSERE POSITIVI.
SI CHIAMA FORMA CANONICA DELLE EQUAZIONI LOGARITMICHE L'UGUAGLIANZA:

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$

DOVE $a>0$ E $a \neq 1$
ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN "X" CHE È UN NUMERO REALE QUALSIASI, TALI CHE

$$\boxed{f(x)>0} \quad E \quad \boxed{g(x)>0}$$

POICHÉ LA FUNZIONE LOGARITMICA È "BIUNIVOCA" DALL'UGUAGLIANZA DEI LOGARITMI SI PUÒ PASSARE ALL'UGUAGLIANZA DEGLI ARGOMENTI, CIOÈ

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

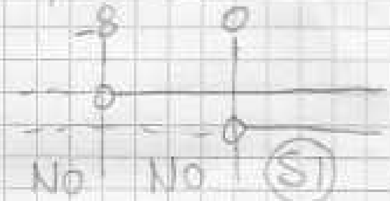
ESEMPI

1) PER RISOLVERE L'EQUAZIONE LOGARITMICA

$$\log_a(x+8) = 2\log_a 3 - \log_a x \qquad a>0, a\neq 1$$

BISOGNA DETERMINARE IL DOMINIO O CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ DELLE SOLUZIONI, CIOÈ:

$$C.A. \begin{cases} x+8>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-8 \\ x>0 \end{cases}$$



$$x>0$$

UTILIZZIAMO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI:

$$\log_a(x+8) + \log_a x = 2\log_a 3$$

$$\log_a[(x+8)x] = \log_a 3^2 \leftarrow \text{FORMA CANONICA}$$

COSÌ:

$$[(x+8)\cdot x] = 3^2$$

$$x^2+8x-9=0 \qquad \Delta = 64-4(1)(-9)=100$$

$$x_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{100}}{2} = \begin{cases} \frac{-8-10}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \\ \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

IL VALORE $x_1=-9$ NON SODDISFA LE CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ $(x>0)$, PERCHÉ:

$\log_a(x+8) = \log_a(-9+8) = \log_a(-1)$ NON ESISTE

COME NON ESISTE $\log_a(-9)$ QUINDI L'UNICA SOLUZIONE È:

$$\boxed{x=1}$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

2) $\log_3 (2x+4) = 2$

C.A. $2x+4>0 \Rightarrow 2x>-4 \Rightarrow x>-2$

DALLA DEFINIZIONE DI LOGARITMO HO:

$$3^2 = (2x+4)$$

$$9 = 2x+4$$

$$2x = 9-4$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}}$$

VISTO CHE $\frac{5}{2} > -2$ ALLORA LA SOLUZIONE È ACCETTABILE

3) $\log_2 x + 3 \log_4 x = 10$

C.A. $= x>0$

VISTO CHE I LOGARITMI HANNO BASI DIVERSE APPLICHIAMO LA FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} = \frac{1}{2}\log_2 x$$

COSÌ:

$$\log_2 x + 3 \cdot \frac{1}{2} \log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2} \log_2 x = 10$$

$$\Rightarrow 5 \log_2 x = 20 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow 2^4 = x$$

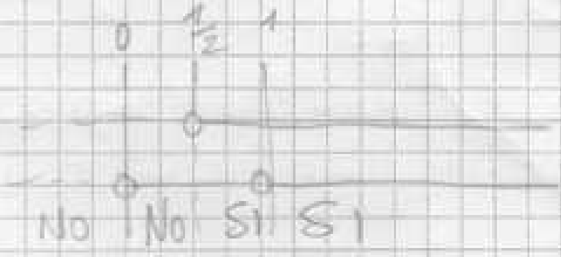
$$\boxed{x = 16}$$ ACCETTABILE

EQUAZIONI LOGARITMICHE

4) $\log_x(2x-1)=2$

C.A. $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

$x>0 \vee x\neq 1$



$x>\frac{1}{2} \vee x\neq 1$

$x^2=2x-1$

$x^2-2x+1=0 \qquad \Delta=0$

$x_{1,2}=$ $\frac{2}{2}=1$ NON ACCETTABILE

$\phantom{x_{1,2}=}$ $\frac{2}{2}=1$ NON ACCETTABILE

L'EQUAZIONE È IMPOSSIBILE

5) $\log_2(3x+1)-\log_2(x+2)+2=\log_2(9x-4)-\log_2 x$

C.A. $\begin{cases}3x+1>0\\x+2>0\\9x-4>0\\x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-\frac{1}{3}\\x>-2\\x>\frac{4}{9}\\x>0\end{cases} \Rightarrow x>\frac{4}{9}$

QUINDI

$\log_2\frac{3x+1}{x+2}+\log_2 4=\log_2\frac{9x-4}{x}$

$\log_2\frac{4(3x+1)}{x+2}=\log_2\frac{9x-4}{x}$

$\frac{4(3x+1)}{x+2}-\frac{9x-4}{x}=0$

$4x(3x+1)-(9x-4)(x+2)=0$

$12x^2+4x-9x^2-18x-4x+8=0$

$3x^2-10x+8=0 \qquad \Delta=100-96=4$

$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{4}}{2\cdot 3}=\frac{10\pm 2}{6}=$ $\frac{10-2}{6}=\frac{8}{6}=\boxed{\frac{4}{3}}$; $\frac{10+2}{6}=\frac{12}{6}=\boxed{2}$