

EQUAZIONI LOGARITMICHE

SI DICONO EQUAZIONI LOGARITMICHE QUELLE EQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA FIGURA NELL'ARGOMENTO DI UNO O PIÙ LOGARITMI. VI STÒ CHE IL DOMINIO DI UN'EQUAZIONE È L'INSIEME DEI VALORI CHE PUÒ ASSUMERE L'INCOGNITA, PER I QUALI L'EQUAZIONE STESSA HA SIGNIFICATO. IN UNA EQUAZIONE LOGARITMICA BISOGNA TENER PRESENTE CHE GLI ARGOMENTI DI TUTTI I LOGARITMI PRESENTI DEVONO ESSERE POSITIVI.

SI CHIAMA **FORMA CANONICA** DELLE EQUAZIONI LOGARITMICHE L'UGUAGLIANZA:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

DOVE $a > 0$ E $a \neq 1$

ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN x , CHE È UN NUMERO REALE QUALSIASI, TALI CHE

$$f(x) > 0 \quad \text{E} \quad g(x) > 0$$

POICHÉ LA FUNZIONE LOGARITMICA È "BIUNIVOCA" DALL'UGUAGLIANZA DEI LOGARITMI SI PUÒ PASSARE ALL'UGUAGLIANZA DEGLI ARGOMENTI, CIÒ È

$$f(x) = g(x)$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

ESEMPI

1) PER RISOLVERE L'EQUAZIONE LOGARITMICA

$$\log_a(x+8) = 2 \log_a 3 - \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$

BISOGNA DETERMINARE IL DOMINIO O CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ DELLE SOLUZIONI, CIOÈ:

$$\text{C.A.} \begin{cases} x+8 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x > 0 \end{cases}$$

$x > 0$

UTILIZZIAMO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI:

$$\log_a(x+8) + \log_a x = 2 \log_a 3$$

$$\log_a[(x+8) \cdot x] = \log_a 3^2 \leftarrow \text{FORMA GABONICA}$$

così:

$$[(x+8) \cdot x] = 3^2$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot (1) \cdot (-9) = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} \frac{-8-10}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \\ \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

IL VALORE $x_1 = -9$ NON SODDISFA LE CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ ($x > 0$), PERCHÈ:

$$\log_a(x+8) = \log_a(-9+8) = \log_a(-1) \quad \text{NON ESISTE}$$

COME NON ESISTE $\log_a(-9)$, QUINDI L'UNICA SOLUZIONE È:

$$\boxed{x = 1}$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

$$2) \log_3(2x+4) = 2$$

$$\text{C.A. } 2x+4 > 0 \Rightarrow 2x > -4 \Rightarrow x > -2$$

DALLA DEFINIZIONE DI LOGARITMO POI:

$$3^2 = (2x+4)$$

$$9 = 2x+4$$

$$2x = 9 - 4$$

$$x = \frac{5}{2}$$

VISTO CHE $\frac{5}{2} > -2$ ALLORA LA SOLUZIONE È ACCETTABILE

$$3) \log_2 x + 3 \log_4 x = 10$$

$$\text{C.A.} = x > 0$$

VISTO CHE I LOGARITMI HANNO BASI DIVERSE
APPPLICHIAMO LA FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI
BASE:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

COSÌ:

$$\log_2 x + 3 \cdot \frac{1}{2} \log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2} \log_2 x = 10$$

$$\Rightarrow 5 \log_2 x = 20 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow 2^4 = x$$

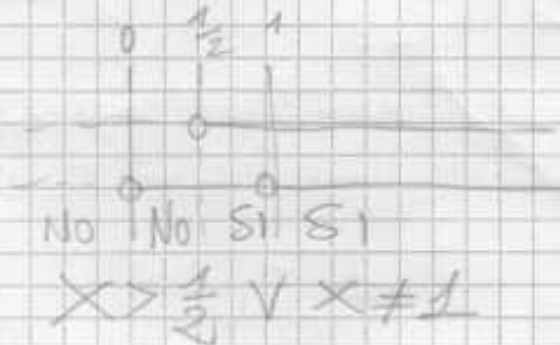
$$x = 16$$

ACCETTABILE

EQUAZIONI LOGARITMICHE

4) $\log_{0.5}(2x-1) = 2$

C.A. $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$
 $x > 0 \vee x \neq 1$



$$x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Delta = 0$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 & \text{NON ACCETTABILE} \\ \frac{2}{2} = 1 & \text{NON ACCETTABILE} \end{cases}$$

L'EQUAZIONE È IMPOSSIBILE

5) $\log_{0.2}(3x+1) - \log_{0.2}(x+2) + 2 = \log_{0.2}(9x-4) - \log_{0.2}x$

C.A. $\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ 9x-4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1/3 \\ x > -2 \\ x > 4/9 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{4}{9}$

ELIMINANDO:

$$\log_{0.2} \frac{3x+1}{x+2} + \log_{0.2} 4 = \log_{0.2} \frac{9x-4}{x}$$

$$\log_{0.2} \frac{4(3x+1)}{x+2} = \log_{0.2} \frac{9x-4}{x}$$

$$\frac{4(3x+1)}{x+2} - \frac{9x-4}{x} = 0$$

$$4x(3x+1) - (9x-4)(x+2) = 0$$

$$12x^2 + 4x - 9x^2 - 18x - 4x + 8 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \quad \Delta = 100 - 96 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{10-2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{10+2}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$$