EQUAZ. DISEQUAZ. 2 GRADO 1 INCOGNITA FRATTE

COME PER QUELLE DI 1° GRADO, ANCHE LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI 2° GRADO FRATTE SONO QUELLE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA COMPARE AL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE.
ANCHE IN QUESTO CASO OGNI EQUAZIONE O DISEQUAZIONE È SEMPRE RICONDUCIBILE AL RAPPORTO TRA DUE POLINOMI, CIOÈ UNA FRAZIONE ALGEBRICA DEL TIPO

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

CHE È DETTA FORMA NORMALE E IN CUI

$N(x)$ POLINOMIO NUMERATORE
PUÒ ESSERE NULLO, UN NUMERO O DI 2° GRADO

$D(x)$ POLINOMIO DENOMINATORE
PUÒ ESSERE DI GRADO QUALSIASI MAGGIORE DI ZERO

SOLUZIONI DI UNA EQUAZIONE FRATTA DI 2° GRADO

LA RICERCA DELLE SOLUZIONI IN UNA EQUAZIONE FRATTA DI 2° GRADO, DEVE TENER CONTO DELLE CONDIZIONI DI ESISTENZA CIOÈ SOLO I VALORI PER I QUALI È DEFINITA LA FRAZIONE ALGEBRICA.
IN GENERALE SI PUÒ DIRE CHE:

A) AMMETTE 2 SOLUZIONI (EQUAZIONE DETERMINATA)

B) AMMETTE INFINITE SOLUZIONI (EQUAZIONE INDETERMINATA)

C) NON AMMETTE SOLUZIONI REALI (EQUAZIONE IMPOSSIBILE)

PER DETERMINARE LE SOLUZIONI DI UNA EQUAZIONE FRATTA DI 2° GRADO BISOGNA SAPER LAVORARE CON LE SEMPLIFICAZIONI DELLE FRAZIONI ALGEBRICHE, CON LE EQUAZIONI FRATTE DI 1° GRADO E LE EQUAZIONI DI 2° GRADO.

VEDIAMO ALCUNI

ESEMPI

DETERMINIAMO LE SOLUZIONI DELLE SEGUENTI EQUAZIONI:

1) $\frac{2}{x}=\frac{x}{2}$ C.E.: $x \neq 0$

$\frac{2}{x}-\frac{x}{2}=0$ PORTIAMO TUTTI I TERMINI AL 1° MEMBRO

$\frac{4-x^2}{2x}=0$ FACCIAMO IL m.c.m. E SOMMIAMO

ABBIAMO OTTENUTO QUINDI UNA FRAZIONE ALGEBRICA NELLA QUALE IL NUMERATORE È UN POLINOMIO DI 2° GRADO MENTRE IL DENOMINATORE È UN POLINOMIO DI 1° GRADO. PER DETERMINARNE LE SOLUZIONI, DOBBIAMO TROVARE QUEI VALORI DI X CHE RENDONO NULLA TALE FRAZIONE.

SAPENDO CHE UNA FRAZIONE ALGEBRICA È NULLA SE E SOLO SE IL SUO NUMERATORE È UGUALE A ZERO, ALLORA:

$4-x^2=0$

$x^2=4$

$\boxed{x=\pm 2}$ 2 SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE FRATTA QUINDI **EQUAZIONE DETERMINATA**

EQUAZ. DISEQUAZ. 2 GRADO 1 INCOGNITA FRATTE

2] $x=\frac{1}{x}$ CE: $x\neq 0$

$x-\frac{1}{x}=0$

$\frac{x^2-1}{x}=0 \iff x^2-1=0$

$x^2=1$

$\boxed{x=\pm 1}$ DETERMINATA

3] $\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{x}{\sqrt{27}}$ CE: $x\neq 0$

$\frac{\sqrt{3}}{x}-\frac{x}{\sqrt{27}}=0$

$\frac{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}-x^2}{x\sqrt{27}}=0$

$\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-x^2}{3x\sqrt{3}}=0$

$\frac{3\cdot 3-x^2}{3x\sqrt{3}}=0$

$\frac{9-x^2}{3x\sqrt{3}}=0 \iff 9-x^2=0$

$x^2=9$

$\boxed{x=\pm 3}$ DETERMINATA

4] $x-1=\frac{9}{x-1}$ CE: $x-1\neq 0$

$x\neq 1$

$x-1-\frac{9}{x-1}=0$

$$\frac{(x-1)^2-9}{x-1}=0$$

$$\frac{x^2-2x+1-9}{x-1}=0$$

$$\frac{x^2-2x-8}{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \quad a=1 \quad b=-2 \quad c=-8$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}= \begin{cases} \frac{2-6}{2}=-\frac{4}{2}=\boxed{-2} \\ \frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=\boxed{4} \end{cases}$$

DETERMINATA

5) $$-\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x^2}$$

C.E.: $x\neq 0 \cup x+3\neq 0$
$x\neq -3$

$$-\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x^2}=0$$

$$\frac{-2x^2-(x+3)}{x^2(x+3)}=0$$

$$\frac{-2x^2-x-3}{x^2(x+3)}=0 \Leftrightarrow 2x^2+x+3=0 \quad a=2 \quad b=1 \quad c=3$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(2)(3)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4}$$

NESSUNA SOLUZIONE REALE

IMPOSSIBILE

6) $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{x+3}$ CE: $x\neq 0 \cup x+3\neq 0$, $x\neq -3$

$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x+3}=0$

$\dfrac{x+3-2x^2}{x^2(x+3)}=0 \iff -2x^2+x+3=0$ $a=-2$ $b=1$ $c=3$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(-2)(3)}}{2(-2)}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-4}=\begin{cases}\dfrac{-1-5}{-4}=\dfrac{-6}{-4}=\boxed{\dfrac{3}{2}}\\[2ex] \dfrac{-1+5}{-4}=\dfrac{4}{-4}=\boxed{-1}\end{cases}$$

DETERMINATA

7) $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1-x^2}{x^2-1}$ CE: $x^2-1\neq 0$, $x\neq\pm 1$

$\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1-x^2}{x^2-1}=0$

$\dfrac{2-1+x^2}{x^2-1}=0$

$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0 \iff x^2+1=0$

$x=\pm\sqrt{-1}$ NESSUNA SOLUZIONE REALE

IMPOSSIBILE

8) $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2-x}{x}$ CE: $x\neq 0$

$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2-x}{x}=0$

$\dfrac{1-2x+x^2}{x^2}=0 \iff x^2-2x+1=0$ $a=1$ $b=-2$ $c=1$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}=\begin{cases}\boxed{1}\\ \boxed{1}\end{cases}$$

DETERMINATA

9) $\frac{2}{x}-\frac{2x}{x+1}=\frac{2-x}{x}$ CE: $\boxed{x\neq 0}\ \cup\ x+1\neq 0$

$x\neq -1$

$$\frac{2}{x}-\frac{2x}{x+1}-\frac{2-x}{x}=0$$

$$\frac{2(x+1)-2x^2-(2-x)(x+1)}{x(x+1)}=0$$

$$\frac{\cancel{2x}+\cancel{2}-2x^2-\cancel{2x}-\cancel{2}+x^2+x}{x(x+1)}=0$$

$$\frac{-x^2+x}{x(x+1)}=0 \iff x^2-x=0$$

$\boxed{x=0}$ SOLUZIONE NON ACCETTABILE PER LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

$x-1=0$

$\boxed{x=1}$ DETERMINATA

SOLUZIONI DI UNA DISEQUAZIONE FRATTA DI 2° GRADO

UNA VOLTA RICONDOTTA IN FORMA NORMALE (CIOÈ SCRITTA LA FRAZIONE ALGEBRICA AL 1° MEMBRO), SI PUÒ AVERE UNO DEI SEGUENTI CASI:

$$\frac{N(x)}{D(x)}>0;\quad \frac{N(x)}{D(x)}\geq 0;\quad \frac{N(x)}{D(x)}<0;\quad \frac{N(x)}{D(x)}\leq 0$$

DOVE COME SAPPIAMO N(x) E D(x) SONO POLINOMI CONTENENTI L'INCOGNITA X E N(x).

ANCHE IN QUESTO CASO, NELLA RICERCA DELLE SOLUZIONI BISOGNA TENER CONTO DELLE CONDIZIONI DI ESISTENZA. QUINDI UNA VOLTA DETERMINATE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA IL TUTTO SI RIDUCE AL CONFRONTO DI 2 DISEQUAZIONI NON FRATTE, INFATTI

$\frac{N(x)}{D(x)} > 0$	$\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$	$\frac{N(x)}{D(x)} < 0$	$\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$
SIGNIFICA CHE IL RAPPORTO TRA IL NUMERATORE E IL DENOMINATORE DEVE FORNIRE UN VALORE POSITIVO CIOÈ > 0	SIGNIFICA CHE IL RAPPORTO TRA IL NUMERATORE E IL DENOMINATORE DEVE FORNIRE UN VALORE POSITIVO O AL MASSIMO UGUALE A ZERO CIOÈ ≥ 0	SIGNIFICA CHE IL RAPPORTO TRA IL NUMERATORE E IL DENOMINATORE DEVE FORNIRE UN VALORE NEGATIVO CIOÈ < 0	SIGNIFICA CHE IL RAPPORTO TRA IL NUMERATORE E IL DENOMINATORE DEVE FORNIRE UN VALORE NEGATIVO O AL MASSIMO UGUALE A ZERO CIOÈ ≤ 0

CIOÈ

$\frac{+}{+}$ $\left(\frac{\text{PIÙ}}{\text{PIÙ}}\right)$	$\frac{+}{+}$ $\left(\frac{\text{PIÙ}}{\text{PIÙ}}\right)$	$\frac{-}{+}$ $\left(\frac{\text{MENO}}{\text{PIÙ}}\right)$	$\frac{-}{+}$ $\left(\frac{\text{MENO}}{\text{PIÙ}}\right)$
OPPURE	OPPURE		
$\frac{-}{-}$ $\left(\frac{\text{MENO}}{\text{MENO}}\right)$	$\frac{-}{-}$ $\left(\frac{\text{MENO}}{\text{MENO}}\right)$	$\frac{+}{-}$ $\left(\frac{\text{PIÙ}}{\text{MENO}}\right)$	$\frac{+}{-}$ $\left(\frac{\text{PIÙ}}{\text{MENO}}\right)$
	OPPURE		
	$\frac{0}{+}$ $\left(\frac{\text{ZERO}}{\text{PIÙ}}\right)$		$\frac{0}{+}$ $\left(\frac{\text{ZERO}}{\text{PIÙ}}\right)$
	OPPURE		
	$\frac{0}{-}$ $\left(\frac{\text{ZERO}}{\text{MENO}}\right)$		$\frac{0}{-}$ $\left(\frac{\text{ZERO}}{\text{MENO}}\right)$

QUINDI ESCLUSI I VALORI CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE (CHE DERIVANO DALLE CONDIZIONI DI ESISTENZA) BISOGNA

STUDIARE SEPARATAMENTE IL SEGNO DEL NUMERATORE (PRIMA DISEQUAZIONE) E DEL DENOMINATORE (SECONDA DISEQUAZIONE) CONSIDERANDO IL LORO RAPPORTO E PRENDENDO COME SOLUZIONI GLI INTERVALLI DI VALORI CHE SODDISFANO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE.

IN CONCLUSIONE ALLORA, PER DETERMINARE LE SOLUZIONI DI UNA DISEQUAZIONE FRATTA DI 2° GRADO, BISOGNA SAPER LAVORARE SEMPRE CON LE FRAZIONI ALGEBRICHE E CON LE DISEQUAZIONI DI 1° E 2° GRADO.

VEDIAMO ALCUNI

ESEMPI

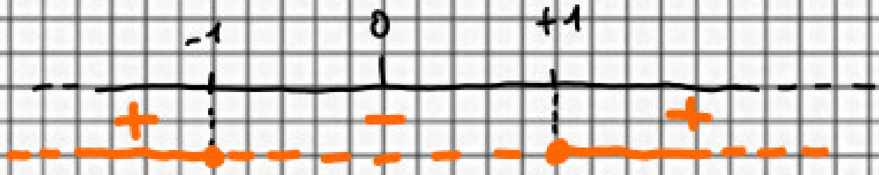
$\boxed{1}$ $\dfrac{x^2-1}{x-2} \geq 0$ CE: $x-2 \neq 0$

$x \neq 2$

N) $x^2-1 \geq 0$

$x^2-1=0$

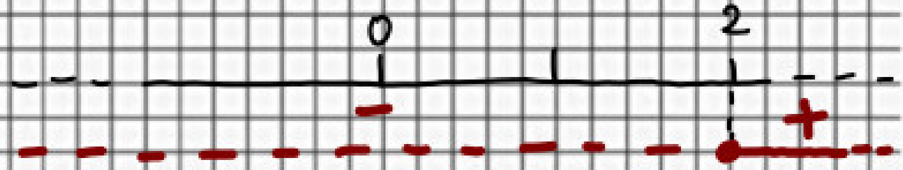
$x = \pm 1$



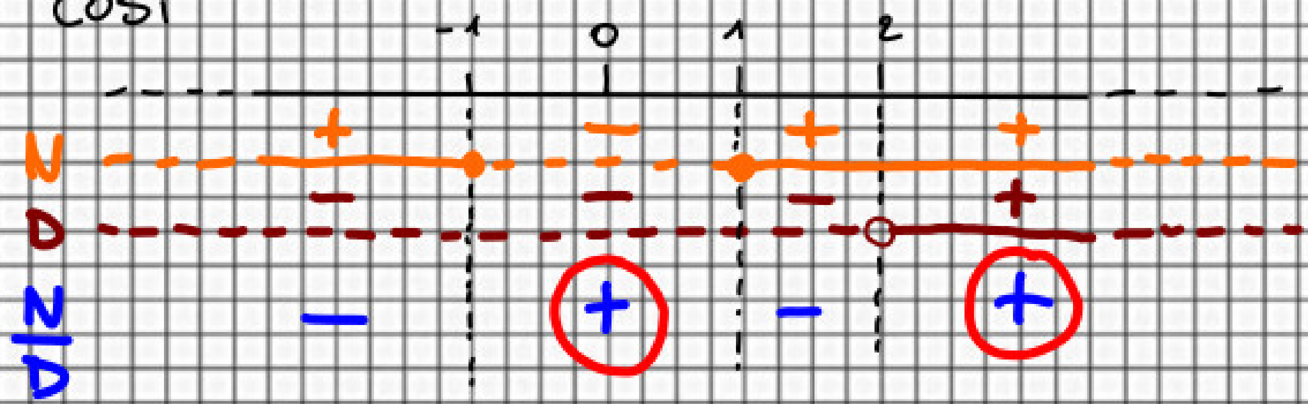
$x \leq -1 \quad \cup \quad x \geq +1$

D) $x-2>0$

$x>2$



COSÌ



E LE SOLUZIONI SONO

$$\boxed{-1 \leq x \leq +1 \quad \cup \quad x > 2}$$

2) $\dfrac{x-2}{x^2-1} \leq 0$ CE: $x^2-1 \neq 0$ $x \neq \pm 1$

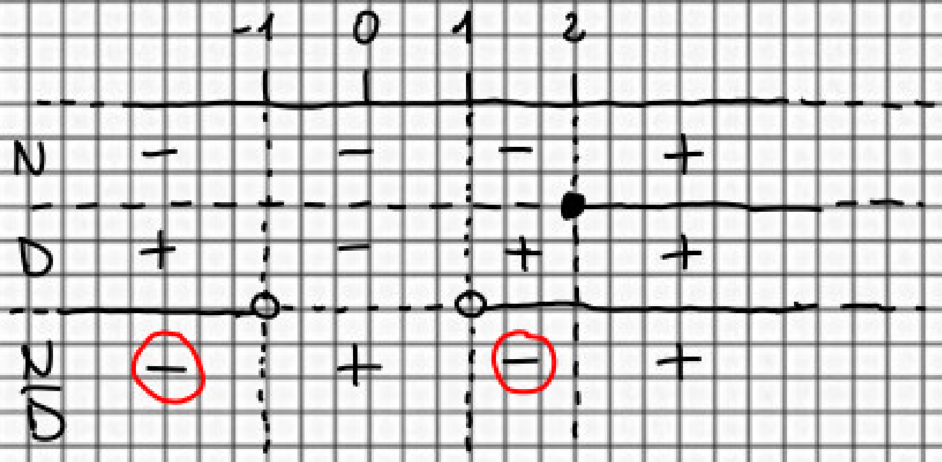
N) $x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

D) $x^2-1 > 0$

$x^2-1=0$

$x_{1,2} = \pm 1$



SOLUZIONI $\boxed{x < -1 \quad \cup \quad +1 < x \leq 2}$

3) $\dfrac{9+x^2}{x^2+3x} \leq 0$ CE: $x^2+3x \neq 0$

$x \neq 0 \cup x \neq -3$

N) $9+x^2 \geq 0$

$9+x^2=0$ MAI

$9+x^2>0$ SEMPRE

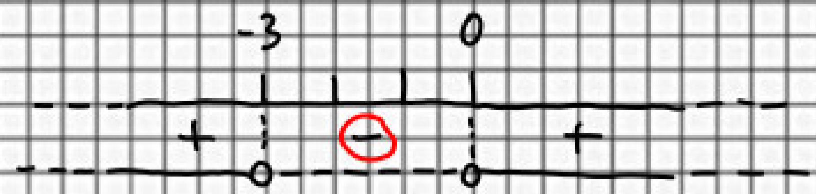
D) $x^2+3x>0$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$x=0$

$x=-3$



$$\boxed{-3 < x < 0}$$