

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

SI DEFINISCONO **EQUAZIONI IRRAZIONALI** TUTTE QUELLE EQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA COMPARE IN ALMENO UN POLINOMIO SOTTO RADICE.

LA LORO RISOLUZIONE DIPENDE DA COME SI PRESENTANO, CIOÈ DALL'INDICE DEL RADICALE, DALLE CONSEGUENTI CONDIZIONI DI ESISTENZA E DALL'EVENTUALE PRESENZA DI 2 O PIÙ RADICALI.

SOSTANZIAMENTE **PER RISOLVERE UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE È NECESSARIO TRASFORMARLA IN UNA EQUAZIONE RAZIONALE** CIOÈ UNA EQUAZIONE CHE NON CONTIENE L'INCOGNITA SOTTO RADICE.

ESISTONO ALCUNI CASI IN CUI UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE È **RISOLVIBILE IN MODO IMMEDIATO**, COME AD ESEMPIO UNA EQUAZIONE DEL TIPO

$$\sqrt[m]{A(x)} = K$$

CON **M PARI** E **K NUMERO NEGATIVO**.

IN QUESTO CASO ESSENDO L'INDICE DEL RADICALE UN NUMERO PARI SAPPIAMO CHE È NECESSARIO CHE IL RADICANDO SIA MAGGIORE O UGUALE A ZERO, CIOÈ UN NUMERO POSITIVO O LO ZERO, MA LA RADICE DI UN NUMERO POSITIVO O UGUALE A ZERO È A SUA VOLTA UN NUMERO POSITIVO O UGUALE A ZERO E DI CONSEGUENZA IN ENTRAMBI I CASI LA RADICE M-ESIMA DI  $A(x)$  NON POTRÀ MAI ESSERE UN NUMERO NEGATIVO FACENDO SÌ CHE QUESTA EQUAZIONE IRRAZIONALE NON ABBA SOLUZIONI, CIOÈ RISULTI ESSERE **IMPOSSIBILE**.

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

AD ESEMPIO

$$\sqrt{x} = -1 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE DEL TIPO

$$\sqrt[m]{A(x)} + \sqrt[m]{B(x)} = 0$$

CON  $m$  PARI E  $A(x) \neq B(x)$ .

ANCHE IN QUESTO CASO ESSENDO L'INDICE UN NUMERO PARI ENTRAMBI I RADICANDI DOVRANNO ESSERE UN NUMERO POSITIVO O LO ZERO E DI CONSEGUENZA LA SOMMA DELLE RADICI POTRÀ ESSERE UGUALE A ZERO SE E SOLTANTO SE SI VERIFICA LA CONDIZIONE CHE ENTRAMBI SONO UGUALI A ZERO E CIOÈ

$$A(x) = 0 \quad \text{E} \quad B(x) = 0$$

MA SE  $A(x) \neq B(x)$  ENTRAMBI SI ANNULERANNO PER VALORI DIVERSI DI  $x$  E TALE CONDIZIONE NON SI VERIFICHERÀ CONTEMPORANEAMENTE, DI CONSEGUENZA L'EQUAZIONE È IMPOSSIBILE.

DEFINIAMO QUINDI LA FORMA NORMALE DI UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE CON UN SOLO RADICANDO, COME

$$\sqrt[m]{A(x)} = B(x)$$

DOVE

$m$  - INDICE RADICE CHE PUÒ ESSERE PARI O DISPARI  
 $A(x)$  } POLINOMI NELL'INCOGNITA  $x$  A  
 $B(x)$  } COEFFICIENTI REALI

E VEDIAMO DUE DIVERSI PROCEDIMENTI DI RISOLUZIONE A SECONDA CHE L'INDICE DELLA RADICE SIA PARI O DISPARI.

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

## INDICE PARI

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE CON  $A(x)$  E  $B(x)$  POLINOMI

$$\sqrt[m]{A(x)} = B(x) \quad \text{CON } m \text{ PARI}$$

DEFINIAMO LE CONDIZIONI DI ESISTENZA E CIOÈ

$$A(x) \geq 0 \quad \text{CONDIZIONE DI ESISTENZA}$$

ELEVIAMO ENTRAMBI I MEMBRI ALLA POTENZA  $m$ -ESIMA IN MODO DA POTER SEMPLIFICARE LA RADICE, CIOÈ

$$[\cancel{\sqrt[m]{A(x)}}]^\cancel{m} = [B(x)]^m$$

OTTENENDO COSÌ

$$A(x) = [B(x)]^m$$

VISTO PERÒ CHE UNA RADICE CON INDICE PARI DI UN NUMERO POSITIVO O NULLO FORNISCE A SUA VOLTA UN NUMERO POSITIVO O NULLO, E VISTO CHE LE POTENZE CON ESPONENTE PARI NON CONSERVANO IL SEGNO DELLA BASE, CIOÈ AD ESEMPIO

$$(2)^2 = 4 \quad \text{MA ANCHE } (-2)^2 = 4$$

ALLORA BISOGNERÀ IMPORRE ANCHE CHE

$$B(x) \geq 0 \quad \text{CONDIZIONE DI CONCORDANZA DEI SEGNI}$$

IN CONCLUSIONE QUINDI PER RISOLVERE UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE CON UN RADICANDO CON INDICE PARI BISOGNA RISOLVERE IL SEGUENTE SISTEMA:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^m \end{cases}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

## INDICE DISPARI

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE CON  $A(x)$  E  $B(x)$  POLINOMI

$$\sqrt[m]{A(x)} = B(x) \quad \text{CON } m \text{ DISPARI}$$

SAPENDO CHE LE RADICI CON INDICE DISPARI AMMETTONO RADICANDI CON SEGNO QUALSIASI ALLORA NON BISOGNA DEFINIRE ALCUNA CONDIZIONE DI ESISTENZA E NESSUNA CONDIZIONE DI CONCORDANZA DEI SEGNI.

QUINDI PER RISOLVERE UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE CON UN RADICANDO CON INDICE PARI BISOGNA SEMPLICEMENTE ELEVARE ENTRAMBI I MEMBRI ALL'INDICE  $m$ , CIOÈ:

$$A(x) = [B(x)]^m$$

## ESEMPI

$$1) \sqrt[3]{x-3} + 1 = 5$$

RISCRIVIAMOLA IN FORMA NORMALE

$$\sqrt[3]{x-3} = \frac{5-1}{2}$$

$$\sqrt[3]{x-3} = 2$$

RISOLVIAMOLA PER INDICE DISPARI

$$(\sqrt[3]{x-3})^3 = (2)^3$$

$$x-3 = 8 \Rightarrow x = 8+3 \Rightarrow x = 11$$

$$2) \sqrt{x-3} + 11 = 5$$

$$\text{CE: } x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$\sqrt{x-3} = \frac{5-11}{2}$$

$$\sqrt{x-3} = -3$$

IMPOSSIBILE

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$3) \sqrt{1-3x} = 8$$

$$(\sqrt{1-3x})^2 = 8^2$$

$$1-3x = 64$$

$$3x = 1-64$$

$$x = -\frac{63}{3}$$

$$x = -21$$

$$\text{CE: } 1-3x \geq 0$$

$$3x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$

SOLUZIONE ACCETTABILE PERCHÉ  $-21 \leq \frac{1}{3}$

$$4) \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = 2$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 8$$

$$x+1 = 8x-8$$

$$8x-x = 1+8$$

$$7x = 9$$

$$x = \frac{9}{7}$$

$$\text{CE: } x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

SOLUZIONE ACCETTABILE PERCHÉ  $\frac{9}{7} \neq 1$

$$5) \sqrt{7x+2} = \frac{9}{4}$$

$$7x+2 = \frac{81}{16}$$

$$7x = \frac{81}{16} - 2$$

$$7x = \frac{49}{16}$$

$$x = \frac{49}{112}$$

$$x = \frac{7}{16}$$

$$\text{CE: } 7x+2 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{2}{7}$$

ACCETTABILE PERCHÉ  $\frac{7}{16} \geq -\frac{2}{7}$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$6) \sqrt[3]{x-4} = 2$$

$$x-4 = 8$$

$$x = 12$$

$$7) \sqrt[3]{13x-5} = 5$$

$$13x-5 = 125$$

$$13x = 130$$

$$x = 10$$

$$8) \sqrt{x-3} = 5-x$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x-3 = (5-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 5 \\ x-3 = 25 - 10x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 28 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 3 \leq 4 \leq 5 \\ \frac{14}{2} = 7 & \text{NON ACCETTABILE} \end{cases}$$

$$9) \sqrt[3]{x^3 - 5x - 4} = x-1$$

$$x^3 - 5x - 4 = (x-1)^3$$

$$x^3 - 5x - 4 = x^3 - 3x^2(1) + 3x(1)^2 - 1$$

$$\cancel{x^3} - 5x - 4 = \cancel{x^3} - 3x^2 + 3x - 1$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{8-10}{6} = -\frac{2}{6} & x_1 = -\frac{1}{3} \\ \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} & x_2 = 3 \end{cases}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$10) \quad x + \sqrt{2x - x^2} = 7$$

$$\sqrt{2x - x^2} = 7 - x$$

$$\begin{cases} \text{i) } 2x - x^2 \geq 0 \\ \text{ii) } 7 - x \geq 0 \\ \text{iii) } (2x - x^2) = (7 - x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } 2x - x^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2x &\leq 0 \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } 7 - x &\geq 0 \\ x &\leq 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 2x - x^2 &= 49 - 14x + x^2 \\ 2x^2 - 16x + 49 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 392}}{4}$$

IMPOSSIBILE

$$11) \quad \sqrt[3]{3x - 5} = 1$$

$$3x - 5 = 1$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

## EQUAZIONI IRRAZIONALI CON 2 RADICI

### SE LE RADICI HANNO LO STESSO INDICE

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE CON  $A(x)$  E  $B(x)$  POLINOMI

$$\sqrt[m]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)}$$

A) SE  $m$  È PARI

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & 1^{\text{a}} \text{ CONDIZIONE DI ESISTENZA} \\ B(x) \geq 0 & 2^{\text{a}} \text{ CONDIZIONE DI ESISTENZA} \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

B) SE  $m$  È DISPARI

$$A(x) = B(x) \quad \text{SI ELEVA AD } m \text{ ENTRAMBI I MEMBRI}$$

### SE LE RADICI HANNO INDICE DIVERSO

SI DEFINISCONO LE CONDIZIONI DI ESISTENZA PER IL RADICALE CON INDICE PARI E SI ELEVANO ENTRAMBI I MEMBRI AL PRODOTTO DEI 2 INDICI:

COSÌ

$$\sqrt[m]{A(x)} = \sqrt[m]{B(x)}$$

$m$  PARI /  $m$  DISPARI

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^m = [B(x)]^m \end{cases}$$

$m$  DISPARI /  $m$  PARI

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ [A(x)]^m = [B(x)]^m \end{cases}$$

OSSERVIAMO CHE:

$$\left[ \sqrt[m]{A(x)} \right]^{m \times m} = \left[ \sqrt[m]{B(x)} \right]^{m \times m} \Rightarrow [A(x)]^{\frac{m \times m}{m}} = [B(x)]^{\frac{m \times m}{m}}$$

CIOÈ

$$\Rightarrow [A(x)]^m = [B(x)]^m$$



# EQUAZIONI IRRAZIONALI

## EQUAZIONE IRRAZIONALE CON 2 RADICI QUADRATE E UN ALTRO TERMINE

$$\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = C$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{A(x) \cdot B(x)} = C^2 - A(x) - B(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} - \sqrt{B(x)} = C$$

$$\begin{cases} \sqrt{A(x)} = C + \sqrt{B(x)} \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ (\sqrt{A(x)})^2 = (C + \sqrt{B(x)})^2 \end{cases}$$

OTTENENDO COSÌ UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE CON UNA SOLA RADICE.

### ESEMPI

$$\begin{aligned} 1) \quad & 3\sqrt{3x} - 3 = 2\sqrt{3x} \\ & 3y - 3 = 2y \\ & y = 3 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{3x}$$

$$\sqrt{3x} = 3$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$2) \quad \sqrt{36+x} = 18 - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{36+x} + \sqrt{x} = 18$$

$$\begin{cases} 36+x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{36+x} + \sqrt{x})^2 = 18^2$$

$$\begin{cases} x \geq -36 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$36+x + 2\sqrt{(36+x)x} + x = 324$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x^2+36x} = 324 - 36 - 2x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+36x} = 144 - x$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

ABBIAMO OTTENUTO COSÌ UNA EQUAZIONE IRRAZIONALE  
CON UNA SOLA RADICE, CIOÈ

$$\sqrt{x^2+36x} = 144-x$$

QUINDI

$$\begin{cases} 1) x^2+36x \geq 0 \\ 2) 144-x \geq 0 \\ 3) (\sqrt{x^2+36x})^2 = (144-x)^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} x^2+36x \geq 0$$

$$x(x+36) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -36$$

$$x \leq -36 \cup x \geq 0$$

$$\textcircled{2} 144-x \geq 0$$

$$x \leq 144$$

$$\textcircled{3} x^2+36x = (144-x)^2$$

$$\cancel{x^2}+36x = 20736 - 288x + \cancel{x^2}$$

$$36x + 288x = 20736$$

$$324x = 20736$$

$$x = \frac{20736}{324} = 64$$

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} x \leq -36 \cup x \geq 0 \\ x \leq 144 \end{array} \right. \rightarrow x \leq -36 \cup 0 \leq x \leq 144$$

$$\textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} x \leq 144 \\ x = 64 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} x = 64 \end{array} \right. \text{ ACCETTABILE PERCHÈ } 0 \leq 64 \leq 144$$

RITORNANDO COSÌ ALLA EQUAZIONE DI PARTENZA ALLORA

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x^2+36x} = 144-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 64 \end{cases} \text{ È ACCETTABILE PERCHÈ } 64 \geq 0$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$3) \sqrt{3(x^2-4)} = \sqrt{5x}$$

$$\begin{cases} 3(x^2-4) \geq 0 \\ 5x \geq 0 \\ 3(x^2-4) = 5x \end{cases} \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3x^2-5x-12=0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -2 \cup x \geq 2 \\ x \geq 0 \\ 3x^2-5x-12=0 \end{cases} \rightarrow x \geq 2$$

$$3x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6} = \begin{cases} \frac{8}{6} = \frac{4}{3} & \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } -\frac{4}{3} < 2 \\ \frac{18}{6} = +3 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 3 \geq 2 \end{cases}$$

$$4) \sqrt{2x^2-x-7} = \sqrt{x^2-3x-8}$$

$$\begin{cases} \text{I} \begin{cases} 2x^2-x-7 \geq 0 \\ 2x^2-x-7 = x^2-3x-8 \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} x^2-3x-8 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{I) } 2x^2 - x - 7 \geq 0$$

$$2x^2 - x - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{57}}{4} = -1,64 \\ \frac{1+\sqrt{57}}{4} = +2,14 \end{cases}$$

$$x \leq -1,64 \cup x \geq +2,14$$

$$\text{II) } x^2 - 3x - 8 \geq 0$$

$$x^2 - 3x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{41}}{2} = -1,70 \\ \frac{3+\sqrt{41}}{2} = +4,70 \end{cases}$$

$$x \leq -1,70 \cup x \geq +4,70$$

$$\text{III) } 2x^2 - x - 7 = x^2 - 3x - 8$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\begin{cases} x \leq -1,64 \cup x \geq 2,14 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } -1,64 < -1 < 2,14$$

$$5) \sqrt{3 - 2x - x^2} = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$I) \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$III) \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 = x^2 - 5x + 4 \end{cases}$$

$$I) -x^2 - 2x + 3 \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-6}{2} = -3 \\ \frac{+2}{2} = +1 \end{cases} \quad -3 \leq x \leq 1$$

$$II) x^2 - 5x + 4 \geq 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = +1 \\ \frac{8}{2} = +4 \end{cases} \quad x \leq 1 \cup x \geq 4$$

$$\rightarrow -3 \leq x \leq 1$$

$$III) -x^2 - 2x + 3 = x^2 - 5x + 4$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{4} = +1 \end{cases}$$

ACCETTABILE PERCHÉ  
 $-3 \leq \frac{1}{2} \leq 1$

ACCETTABILE PERCHÉ  
 $-3 \leq 1 \leq 1$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$6) \sqrt{2x-3a} = 3\sqrt{a} - \sqrt{2x}$$

$$\sqrt{2x-3a} + \sqrt{2x} = 3\sqrt{a}$$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ 2x-3a \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} a \geq 0 & \\ x \geq \frac{3}{2}a & \rightarrow x \geq \frac{3}{2}a \\ x \geq 0 & \end{array}$$

$$(\sqrt{2x-3a} + \sqrt{2x})^2 = (3\sqrt{a})^2$$

$$2x-3a+2x+2\sqrt{(2x-3a)2x} = 9a$$

$$+4x-3a+2\sqrt{4x^2-6ax} = 9a$$

$$2\sqrt{4x^2-6ax} = 9a+3a-4x$$

$$2\sqrt{4x^2-6ax} = 12a-4x$$

$$\sqrt{4x^2-6ax} = 6a-2x$$

$$\begin{cases} 4x^2-6ax \geq 0 \\ 6a-2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x(x-a) \geq 0 \\ 2x \leq 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-6ax = (6a-2x)^2 \\ 4x^2-6ax = 36a^2+4x^2-24ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-6ax = 36a^2+4x^2-24ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-6ax = (6a-2x)^2 \\ 4x^2-6ax = 36a^2+4x^2-24ax \end{cases}$$

$$x=0 \quad x=a$$

$$\text{se } a < 0$$

$$x \leq a \cup x \geq 0$$

$$\text{se } a > 0$$

$$x \leq 0 \cup x \geq a$$

$$x \leq 3a$$

$$\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 6ax + 24ax - 36a^2 = 0$$

$$18ax - 36a^2 = 0$$

$$18ax = 36a^2$$

$$x = \frac{\cancel{36a^2}}{\cancel{18a}} = 2a$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

A QUESTO PUNTO DISCUTIAMO LA SOLUZIONE IN BASE AL PARAMETRO "a":

$$X = 2a \begin{cases} \text{SE } a < 0 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 2a \leq a \\ \text{SE } a = 0 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 2a \geq 0 \\ \text{SE } a > 0 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 2a \geq a \end{cases}$$

RITORNANDO INFINE ALL'EQUAZIONE DI PARTENZA LA SOLUZIONE

$$X = 2a \quad \text{SE } a \geq 0 \quad \text{È ACCETTABILE PERCHÉ } 2a \geq \frac{3}{2}a$$

$$\begin{aligned} \text{7] } \sqrt{x+4ab} - \sqrt{x} &= 2a \\ \sqrt{x+4ab} &= 2a + \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+4ab \geq 0 \\ x \geq 0 \\ (\sqrt{x+4ab})^2 = (2a + \sqrt{x})^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4ab \\ x \geq 0 \\ \cancel{x+4ab} = \cancel{4a^2} + \cancel{x} + 4a\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4ab \\ x \geq 0 \\ 4a\sqrt{x} = 4ab - 4a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4ab \\ x \geq 0 \\ \cancel{4a\sqrt{x}} = \cancel{4a}(b-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4ab \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} = (b-a) \end{cases}$$

ADESSO CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE CON UN SOLO RADICALE CON INDICE PARI

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\sqrt{x} = b - a$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ b - a \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ b \geq a \end{cases}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{x})^2 = (b-a)^2 \\ x = (b-a)^2 \end{array} \right.$$

LA SOLUZIONE

$$X = (b-a)^2 \quad \text{È ACCETTABILE } \forall a, b: b \geq a \text{ PERCHÉ } (b-a)^2 \geq 0$$

E RITORNANDO ALLA EQUAZIONE DI PARTEZZA

$$\boxed{X = (b-a)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SE } a=0 \text{ E } b=0 \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } (b-a)^2 \geq 0 \\ \text{SE } a \text{ E } b \text{ CONCORDI} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } (b-a)^2 \geq 0 \\ \text{SE } a \text{ E } b \text{ DISCORDI} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } (b-a)^2 \geq -4ab^* \end{array} \right.$$

\* INFATTI

$$(b-a)^2 \geq -4ab$$

$$b^2 + a^2 - 2ab \geq -4ab$$

$$b^2 + a^2 - 2ab + 4ab \geq 0$$

$$b^2 + a^2 + 2ab \geq 0$$

$$(b+a)^2 \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$8) \sqrt{3x+28} - \sqrt{x-3} = 5$$

$$\sqrt{3x+28} = 5 + \sqrt{x-3}$$

$$\begin{cases} 3x+28 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ (\sqrt{3x+28})^2 = (5+\sqrt{x-3})^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{28}{3} \\ x \geq +3 \\ 3x+28 = 25+x-3+10\sqrt{x-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 10\sqrt{x-3} = 2x+6 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{x-3} = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

SVILUPPIAMO L'EQUAZIONE CON UN SOLO RADICALE

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \geq 0 \\ (\sqrt{x-3})^2 = \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right)^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{1}{5}x \geq -\frac{3}{5} \\ x-3 = \frac{1}{25}x^2 + \frac{6}{25}x + \frac{9}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{1}{25}x^2 + \frac{6}{25}x - x + \frac{9}{25} + 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ \frac{1}{25}x^2 - \frac{19}{25}x + \frac{84}{25} = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 336}}{2} = \frac{19 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 7 \geq 3 \\ 12 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 12 \geq 3 \end{cases}$$

RITORNANDO COSÌ ALLA EQUAZIONE DI PARTENZA

$$\boxed{7} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ} \quad 7 \geq 3$$

$$\boxed{12} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ} \quad 12 \geq 3$$



# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$9) \sqrt{x-2} = 1 - \sqrt{3-x}$$

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = 1$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 2\sqrt{(x-2)(3-x)} = 1 - (x-2) - (3-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \\ 2\sqrt{(x-2)(3-x)} = 1 - x + 2 - 3 + x \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2\sqrt{(x-2)(3-x)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ (x-2)(3-x) = 0 \end{cases}$$

$$x = 2$$

ACCETTABILE PERCHÉ  $2 \leq 2 \leq 3$

$$x = 3$$

ACCETTABILE PERCHÉ  $2 \leq 3 \leq 3$

$$10) \sqrt{2x-5} = 3 - \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1} = 3$$

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2\sqrt{(2x-5)(x+1)} = 3^2 - (2x-5) - (x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x \geq -1 \\ 2\sqrt{(2x-5)(x+1)} = 9 - 2x + 5 - x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 2\sqrt{(2x-5)(x+1)} = 13 - 3x \end{cases}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \sqrt{(2x-5)(x+1)} = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-5)(x+1) \geq 0 \\ \frac{13}{2} - \frac{3}{2}x \geq 0 \\ (2x-5)(x+1) = \left(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}x\right)^2 \end{cases} \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \\ \frac{3}{2}x \leq \frac{13}{2} \\ 2x^2 - 3x - 5 = \frac{169}{4} + \frac{9}{4}x^2 - \frac{39}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{4} = \left\langle \frac{-1}{\frac{5}{2}} \right. & x \leq -1 \cup x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - 2x^2 - \frac{39}{2}x + 3x + \frac{169}{4} + 5 = 0$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \cup \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{13}{3} \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{33}{2}x + \frac{189}{4} = 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -1 \cup \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{13}{3} \\ x^2 - 66x + 189 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{66 \pm \sqrt{4356 - 756}}{2} = \frac{66 \pm 60}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{126}{2} = 63 \end{cases}$$

3 ACCETTABILE PERCHÉ  $\frac{5}{2} \leq 3 \leq \frac{13}{3}$

63 NON ACCETTABILE PERCHÉ  $63 > \frac{13}{3}$

E RITORNANDO ALL'EQUAZIONE DI PARTENZA

3 ACCETTABILE PERCHÉ  $3 \geq \frac{5}{2}$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$11) \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{2x-1} = 0$$

$$\sqrt[3]{x-2} = -\sqrt[3]{2x-1}$$

$$(\sqrt[3]{x-2})^3 = (-\sqrt[3]{2x-1})^3$$

$$x-2 = -2x+1$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

$$(2x+4)^{\frac{2}{2}} = (2)(x+2)$$

$$12) \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{2x+4} = 1$$

$$\sqrt[3]{x-3} = 1 - \sqrt[3]{2x+4}$$

$$(\sqrt[3]{x-3})^3 = (1 - \sqrt[3]{2x+4})^3$$

$$x-3 = 1 - 3\sqrt[3]{2x+4} + 3(\sqrt[3]{2x+4})^2 - (2x+4)$$

$$3\sqrt[3]{2x+4} - 3(\sqrt[3]{2x+4})^2 + x - 3 - 1 + 2x + 4 = 0$$

$$3\sqrt[3]{2x+4} - 3(\sqrt[3]{2x+4})^2 + 3x = 0$$

A QUESTO PUNTO CONSIDERIAMO

$$y = \sqrt[3]{2x+4}$$

DA CUI

$$y^3 = 2x+4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^3 - 2$$

E SOSTITUENDO SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI 3° GRADO IN Y, CIOÈ:

$$3y - 3y^2 + 3\left(\frac{1}{2}y^3 - 2\right) = 0$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

ED ANCORA

$$\frac{3}{2}y^3 - 3y^2 + 3y - 6 = 0$$

$$y^3 - 2y^2 + 2y - 4 = 0$$

VISTO CHE IL POLINOMIO SI ANNULLA IN +2, CIÒ

$$P(+2) = (+2)^3 - 2(+2)^2 + 2(+2) - 4 = 0$$

ALLORA LO ABBASSIAMO DI GRADO DIVIDENDOLO CON LA REGOLA DI RUFFINI PER IL BINOMIO  $(y-2)$

	1	-2	+2	-4
+2		+2	0	+4
	1	0	+2	0

RISCRIVENDO QUINDI L'EQUAZIONE COME:

$$(y-2)(y^2+2) = 0$$

LE CUI SOLUZIONI SONO:

$$y-2=0 \quad \boxed{y=2} \rightarrow \text{UNICA SOLUZIONE}$$

$$y^2+2=0 \quad \text{IMPOSSIBILE IN } \mathbb{R}$$

A QUESTO PUNTO SAPENDO CHE

$$x = \frac{1}{2}y^3 - 2$$

ALLORA

$$x = \frac{1}{2}(2)^3 - 2 = \boxed{2} \quad \text{SOLUZIONE}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$13) \sqrt[3]{x+1} = 1 - \sqrt[3]{x}$$

$$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = \left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$x+1 = 1 - 3\sqrt[3]{x} + 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - x$$

$$3\sqrt[3]{x} - 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2x = 0$$

CONSIDERIAMO  $y = \sqrt[3]{x}$  DA CUI  $x = y^3$

COSÌ:

$$3y - 3y^2 + 2y^3 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 + 3y = 0$$

$$y(2y^2 - 3y + 3) = 0$$

$$y = 0$$

UNICA SOLUZIONE

$$2y^2 - 3y + 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{4}$$

IMPOSSIBILE IN  $\mathbb{R}$

COSÌ

$$x = y^3 = 0$$

SOLUZIONE

$$14) \sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{3}$$

$$\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{x+1}\right)^3$$

$$2-x = 3 - 3\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[3]{3} \cdot \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 - x - 1$$

$$3\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} - 3\sqrt[3]{3} \cdot \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 = 0$$

CONSIDERIAMO  $y = \sqrt[3]{x+1}$  DA CUI  $x = y^3 - 1$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

COSTI

$$3(\sqrt[3]{3})^2 y - 3\sqrt[3]{3} y^2 = 0$$

$$3\sqrt[3]{3} y (\sqrt[3]{3} - y) = 0$$

LE CUI SOLUZIONI SONO

$$y = 0$$

E

$$y = \sqrt[3]{3}$$

QUINDI

$$x = y^3 - 1 = 0 - 1 = \boxed{-1}$$

$$x = y^3 - 1 = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = \boxed{2}$$

SOLUZIONI

$$\boxed{15} \sqrt{2x-2} = \sqrt[4]{3x^2+5x+4}$$

$$\sqrt[8]{(2x-2)^4} = \sqrt[8]{(3x^2+5x+4)^2}$$

$$\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ 3x^2+5x+4 \geq 0 \\ (2x-2)^4 = (3x^2+5x+4)^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ (2x-2)^{2 \cdot 2} = (3x^2+5x+4)^{2 \cdot 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ (2x-2)^2 = 3x^2+5x+4 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 8x + 4 = 3x^2 + 5x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 3x^2 - 8x - 5x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 13x = 0 \end{cases}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-13) = 0 \end{cases} \begin{cases} x=0 & \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } 0 < 1 \\ x=13 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 13 \geq 1 \end{cases}$$

$$16) \sqrt[6]{3-3x} - \sqrt[3]{3x-1} = 0$$

$$\sqrt[6]{3-3x} = \sqrt[3]{3x-1}$$

$$\sqrt[18]{(3-3x)^3} = \sqrt[18]{(3x-1)^6}$$

$$\begin{cases} 3-3x \geq 0 \\ 3x-1 \geq 0 \\ (3-3x)^3 = (3x-1)^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{3} \\ (3-3x)^{3 \times 1} = (3x-1)^{3 \times 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 3-3x = (3x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 3-3x = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 9x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} -\frac{1}{3} & \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } -\frac{1}{3} < \frac{1}{3} \\ +\frac{2}{3} & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} \leq 1 \end{cases}$$

$$17) \sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \sqrt{2x-7}$$

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x-7 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x})^2 = (\sqrt{2x-7})^2$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 0 \\ x \geq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{x+5} + \cancel{x} - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+5} = \cancel{2x-7}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ 2\sqrt{x^2+5x} = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ \sqrt{x^2+5x} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+5x \geq 0 \\ x^2+5x = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \cup x \geq 0 \\ x^2+5x-36 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} -9 \text{ ACCETTABILE PERCHÉ } -9 \leq -5 \\ 4 \text{ ACCETTABILE PERCHÉ } 4 \geq 0 \end{cases}$$

QUINDI:

$$\boxed{x = -9} \quad \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } -9 < \frac{7}{2}$$

$$\boxed{x = 4} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 4 \geq \frac{7}{2}$$

18)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{x+1} + \cancel{x} + 2\sqrt{x^2+x} = \cancel{2x+1} + 2\sqrt{2x} \end{cases}$$

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 = (\sqrt{2x+1})^2 \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2+x} = \sqrt{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0 \cup x \geq 0 \\ x^2+x = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x=0 \quad x=1 \end{cases}$$

$$\boxed{x=0} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 0 \geq 0$$

$$\boxed{x=1} \quad \text{ACCETTABILE PERCHÉ } 1 \geq 0$$



# EQUAZIONI IRRAZIONALI

## EQUAZIONI IRRAZIONALI FRATTE

SI DEFINISCE EQUAZIONE IRRAZIONALE FRATTA UNA EQUAZIONE CHE CONTIENE ALMENO UNA FRAZIONE ALGEBRICA CON AL DENOMINATORE UN RADICALE IN CUI IL RADICANDO CONTIENE L'INCOGNITA COME AD ESEMPIO:

$$\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}} + \sqrt{C(x)} = 0$$

PER RISOLVERE QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SI PONGONO TUTTE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA PER I RADICALI CON INDICE PARI, SI PONGONO TUTTI I DENOMINATORI DIVERSI DA ZERO ED INFINE SI RISCRIVE L'EQUAZIONE SOMMANDO EVENTUALMENTE I TERMINI MEDIANTE IL M.C.M. TRA I DENOMINATORI E SI CONSIDERA L'EQUAZIONE TRA I SOLI NUMERATORI.

### ESEMPI

$$1) \frac{x+1-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-\sqrt{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \\ \sqrt{x} = x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \\ x = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \cup x \neq 9 \\ x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \cup x \neq 9 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \cup x \neq 9 \\ \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

NESSUNA SOLUZIONE

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$2) \frac{x - \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 1} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 5(x - \sqrt{x} + 1) = 3(x + \sqrt{x} - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 - x \\ 5x - 5\sqrt{x} + 5 = 3x + 3\sqrt{x} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq (1-x)^2 \\ 2x - 8\sqrt{x} + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 + x^2 - 2x \\ y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 1 \neq 0 \\ 2y^2 - 8y + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad x \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = y^2 = (2)^2 = \boxed{4} \quad \text{ACCETTABILE}$$

$$3) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x}}{\sqrt{3} - \sqrt{x}} = 3$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{3} - \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{3} + \sqrt{x} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{x}) \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq \sqrt{3} \rightarrow x \geq 0 \cup x \neq 3 \\ \sqrt{3} + \sqrt{x} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \cup x \neq 3 \\ 4\sqrt{x} = 2\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \cup x \neq 3 \\ 16x = 4 \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \cup x \neq 0 \\ 16x = 12 \end{cases}$$

$$x = \frac{12}{16} = \boxed{\frac{3}{4}} \quad \text{ACCETTABILE}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$4) \frac{\sqrt{x+16}}{\sqrt{4-x}} + \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+16}} = \frac{5}{2} \quad [-12 \text{ e } 0]$$

$$\frac{2(\sqrt{x+16})^2 + 2(\sqrt{4-x})^2}{2\sqrt{(4-x)(x+16)}} = \frac{5\sqrt{(4-x)(x+16)}}{2\sqrt{(4-x)(x+16)}}$$

$$\begin{cases} x+16 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ \sqrt{4-x} \neq 0 \\ \sqrt{x+16} \neq 0 \\ 2(\sqrt{x+16})^2 + 2(\sqrt{4-x})^2 = 5\sqrt{(4-x)(x+16)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -16 \\ x \leq 4 \\ x \neq 4 \cup x \neq -16 \\ [2(x+16) + 2(4-x)]^2 = [5\sqrt{(4-x)(x+16)}]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 < x < 4 \\ (\cancel{2}x + 32 + 8 - \cancel{2}x)^2 = 25(4-x)(x+16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 < x < 4 \\ 1600 = \cancel{2}5(4-x)(x+16) \end{cases} \quad \begin{cases} -16 < x < 4 \\ 64 = (4-x)(x+16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 < x < 4 \\ \cancel{6}4 = 4x + \cancel{6}4 - x^2 - 16x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 < x < 4 \\ x^2 + 12x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -16 < x < 4 \\ x(x+12) = 0 \end{cases}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\boxed{x=0} \quad \text{ACCETTABILE}$$

$$\boxed{x=-12} \quad \text{ACCETTABILE}$$

$$5) \quad \frac{16-x}{4+\sqrt{x}} = \frac{x-28}{3}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3(16-x) = (x-28)(4+\sqrt{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 48 - 3x = 4x + x\sqrt{x} - 112 - 28\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 7x + x\sqrt{x} - 28\sqrt{x} - 160 = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO

$$\sqrt{x} = y \quad \text{DA CUI} \quad x = y^2$$

$$\text{COSÌ} \quad 7y^2 + y \cdot y - 28y - 160 = 0$$

$$\text{MA:} \quad y^3 + 7y^2 - 28y - 160 = 0$$

$$P(5) = (5)^3 + 7(5)^2 - 28(5) - 160 = 0$$

ALLORA:

	1	+7	-28	-160
+5		+5	+60	+160
	1	+12	+32	0

$$\Rightarrow (y-5)(y^2+12y+32) = 0$$

$$y = 5 \quad y_{1,2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{matrix} -8 \\ -4 \end{matrix}$$

QUINDI:

$$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow \boxed{x=25} \quad \text{SOLUZIONE ACCETTABILE}$$

$$\sqrt{x} = -4 \quad \text{IMPOSSIBILE} \quad \text{SOLUZIONE NON ACCETTABILE}$$

$$\sqrt{x} = -8 \quad \text{IMPOSSIBILE} \quad \text{SOLUZIONE NON ACCETTABILE}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

## EQUAZIONI IRRAZIONALI CON RADICALI MULTIPLI

IN PRESENZA DI EQUAZIONI IRRAZIONALI CONTENENTI RADICALI MULTIPLI COME AD ESEMPIO:

$$\sqrt[m]{A(x)} \pm \sqrt[m]{B(x)} = C(x)$$

SI PUÒ PROCEDERE PRIMA CERCANDO LE SOLUZIONI E POI VERIFICARLE.

NEL CASO PRESO AD ESEMPIO PER CERCARE LE SOLUZIONI SI ELEVANO ENTRAMBI I MEMBRI AD "M" (L'INDICE DELLA RADICE PIÙ ESTERNA..) IN MODO DA RIMUOVERE IL RADICALE DI GRADO M DALL'ESPRESSIONE, QUINDI:

$$\left(\sqrt[m]{A(x)} \pm \sqrt[m]{B(x)}\right)^m = [C(x)]^m$$

A QUESTO PUNTO SI OTERRÀ UNA EQUAZIONE CONTENENTE UN RADICALE SEMPLICE E QUINDI POTREMO CERCARE DI RISCRIVERE L'EQUAZIONE IN UNA DELLE FORME PRECEDENTI, E RISOLVERLA DI CONSEGUENZA.

UNA VOLTA OTTENUTE LE SOLUZIONI LE SOSTITUIAMO ALLA EQUAZIONE DI PARTENZA VERIFICANDONE LA CONSEGUENTE IDENTITÀ (SOLUZIONE ACCETTABILE) O MEHO (SOLUZIONE NON ACCETTABILE).

### ESEMPI

$$\begin{aligned} 1 \quad & \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3 \\ & x + \sqrt{x+3} = 3^2 \end{aligned}$$

# EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\sqrt{x+3} = 9-x$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 9-x \geq 0 \\ x+3 = (9-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 9 \\ x+3 = 81+x^2-18x \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 9 \\ x^2-19x+78 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 7}{2} = \begin{cases} 6 & \text{ACCETTABILE PERCHÉ } -3 \leq 6 \leq 9 \\ 13 & \text{NON ACCETTABILE PERCHÉ } 13 > 9 \end{cases}$$

IN DEFINITIVA 6 SOLUZIONE ACCETTABILE PERCHÉ:

$$\sqrt{6} + \sqrt{6+3} = 3 \Rightarrow \sqrt{6+3} = 3 \Rightarrow \boxed{3=3}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}$$

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\sqrt{(x+\sqrt{x})^2} = 2\sqrt{x} + \sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

$$x + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x}$$

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x}$$

$$(x - \sqrt{x})^2 = x^2 - x$$

$$\cancel{x^2} + x - 2x\sqrt{x} = \cancel{x^2} - x$$

$$2x\sqrt{x} - 2x = 0$$

$$2x(\sqrt{x} - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \cup \sqrt{x}-1=0 \quad \sqrt{x}=1 \quad \boxed{x=1}$$

x=0 NON ACCETTABILE PERCHÉ IL DENOMINATORE

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \neq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

x=1 ACCETTABILE PERCHÉ

$$\sqrt{1+\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{1}}{\sqrt{1+\sqrt{1}}} + \sqrt{1-\sqrt{1}} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$$