# LA FUNZIONE ESPONENZIALE

1

## DEFINIZIONE DI FUNZIONE ESPONENZIALE

SI DEFINISCE FUNZIONE ESPONENZIALE, LA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE CON EQUAZIONE

$$y = a^x$$

DOVE "a" È DETTA BASE DELLA FUNZIONE ED È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (>0) MENTRE "x" CHE È LA VARIABILE DELLA FUNZIONE È DETTA ESPONENTE ED È UN NUMERO REALE QUALSIASI, DA QUI NE DERIVA CHE IL SUO DOMINIO È TUTTO L'INSIEME $\mathbb{R}$ (NUMERI REALI).

LA SUA PROPRIETÀ FONDAMENTALE È CHE SE LA BASE È MAGGIORE DI 1, CIOÈ $a>1$ ALLORA LA FUNZIONE È CRESCENTE, MENTRE SE LA BASE È COMPRESA TRA 0 ED 1, CIOÈ $0<a<1$ ALLORA LA FUNZIONE È DECRESCENTE.
NEL CASO PARTICOLARE IN CUI LA BASE È UGUALE AD 1, CIOÈ $a=1$, ALLORA LA FUNZIONE È COSTANTE, RAPPRESENTATA DALLA RETTA $y=1$ (VEDI PROPRIETÀ POTENZE PARTICOLARI)

## CODOMINIO

IN OGNI CASO IL VALORE DI Y RESTITUITO DALLA FUNZIONE È SEMPRE UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (>0), TRANNE NEL CASO PARTICOLARE CHE $a=1$, ALLORA Y SARÀ SEMPRE UGUALE AD 1, DI CONSEGUENZA IL SUO CODOMINIO È L'INSIEME DEI NUMERI REALI STRETTAMENTE POSITIVI (>0), CIOÈ $\mathbb{R}^+$, TRANNE NEL NEL CASO $a=1$ CHE SARÀ L'INSIEME $\{1\}$.

# LA FUNZIONE ESPONENZIALE

## LA CURVA ESPONENZIALE

TRALASCIANDO IL CASO IN CUI $a=1$, PERCHÉ COME GIÀ DETTO LA FUNZIONE È COSTANTE ED È LA RETTA $y=1$, PER VALUTARE L'ANDAMENTO NEL PIANO CARTESIANO DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE, DISTINGUIAMO I 2 DIVERSI CASI IN CUI $a>1$ ED $0<a<1$, CON 2 SEMPLICI ESEMPI:

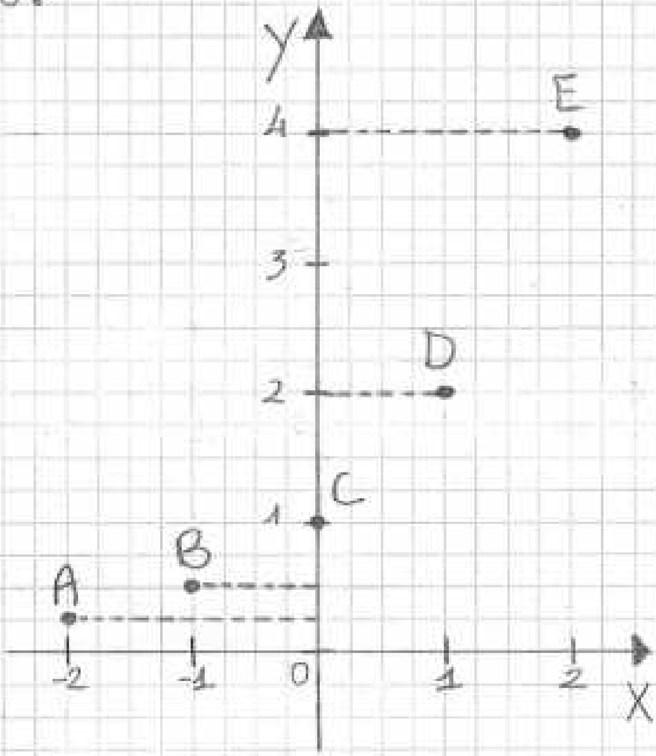
### I° CASO – $a>1$

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA FUNZIONE DI EQUAZIONE:

$$y=2^x$$

DETERMINIAMO QUALCHE SUO PUNTO E RAPPRESENTIAMOLI NEL PIANO CARTESIANO:

| | $x$ | $f(x)$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| A | $-2$ | $2^{-2}=\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| B | $-1$ | $2^{-1}=\frac{1}{2^1}$ | $\frac{1}{2}$ |
| C | $0$ | $2^0$ | $1$ |
| D | $1$ | $2^1$ | $2$ |
| E | $2$ | $2^2$ | $4$ |




DA QUESTO SI EVINCE SIA ANALITICAMENTE CHE GRAFICAMENTE CHE LA $y$ CRESCE AL CRESCERE DELLA $x$, CIOÈ LA FUNZIONE È CRESCENTE.

# LA FUNZIONE ESPONENZIALE

DI CONSEGUENZA SE LA X CRESCE IN MANIERA INFINITA (ESSENDO IL DOMINIO TUTTO L'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$ CIOÈ UN INSIEME ILLIMITATO!), PER VERIFICARE COME SI COMPORTA LA FUNZIONE BASTA VERIFICARE CHE:

1) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \quad (2^{+\infty} = +\infty)}$

ALLO STESSO MODO SE LA X DECRESCE IN MANIERA INFINITA:

2) $\boxed{\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0}$

IN QUESTO CASO PERCHÉ $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$.

OSSERVAZIONE ★

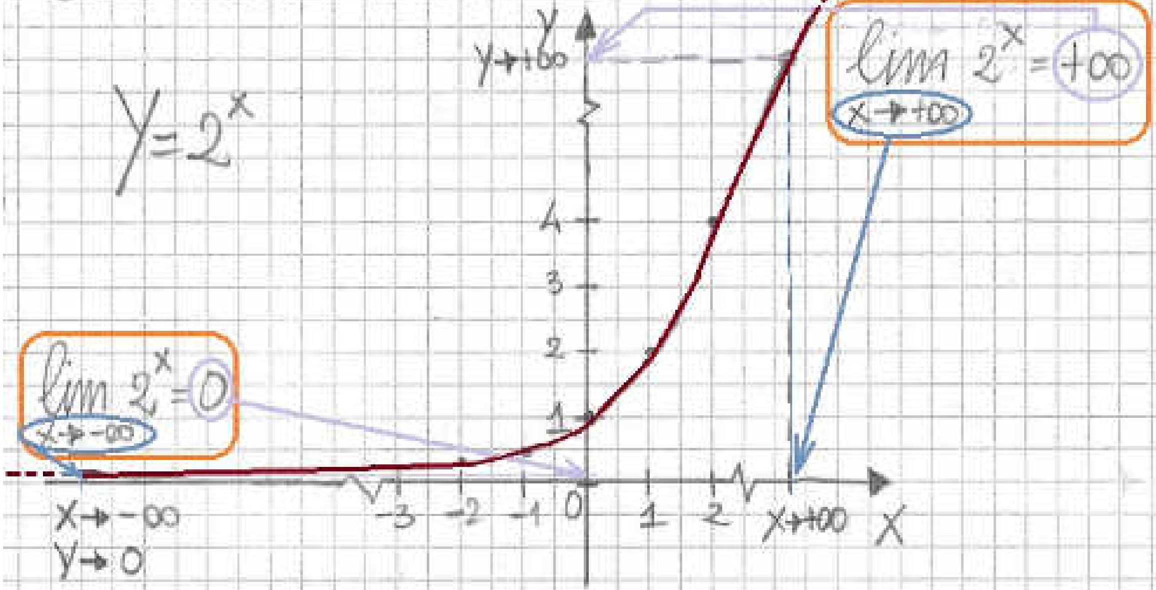
SE NON SI HA PADRONANZA DELLA TEORIA DEI LIMITI, PER COMPRENDERE LA 1) BASTA RICORDARE CHE UNA POTENZA CON BASE INTERA, CRESCE AL CRESCERE DELL'ESPONENTE, MENTRE PER LA 2) BASTA RICORDARE CHE A PARITÀ DI NUMERATORE, UNA FRAZIONE DECRESCE AL CRESCERE DEL DENOMINATORE, CIOÈ AD ESEMPIO SE 1 TORTA LA DIVIDIAMO IN 2, CE NE SPETTA UNA METÀ, SE LA DIVIDIAMO IN 10, CE NE SPETTA UN DECIMO, IN 100 UN CENTESIMO, E COSÌ VIA FINCHÉ CIÒ CHE CI SPETTA DIVENTA QUASI PARI A ZERO, ED IL QUASI È IMPORTANTE PERCHÉ NON SARÀ MAI ZERO PERCHÉ UNA BRICIOLA CI SPETTERÀ SEMPRE!

DI CONSEGUENZA LA CURVA ESPONENZIALE

# LA FUNZIONE ESPONENZIALE

DEL NOSTRO ESEMPIO DI FUNZIONE SARÀ:

$$Y=2^x$$




$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$$

## $\boxed{\text{II CASO} - 0<a<1}$

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO:

$$Y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

| | X | f(x) | Y |
|---|---|---|---|
| A | -2 | $\frac{1}{2^x}=\frac{1}{2^{-2}}=\frac{1}{\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}$ | 4 |
| B | -1 | $\frac{1}{2^x}=\frac{1}{2^{-1}}=\frac{1}{1/2}$ | 2 |
| C | 0 | $\frac{1}{2^0}=\frac{1}{1}$ | 1 |
| D | 1 | $\frac{1}{2^1}$ | $\frac{1}{2}$ |
| E | 2 | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{4}$ |

SI EVINCE CHE LA Y DECRESCE AL CRESCERE DELLA X (FUNZIONE DECRESCENTE)

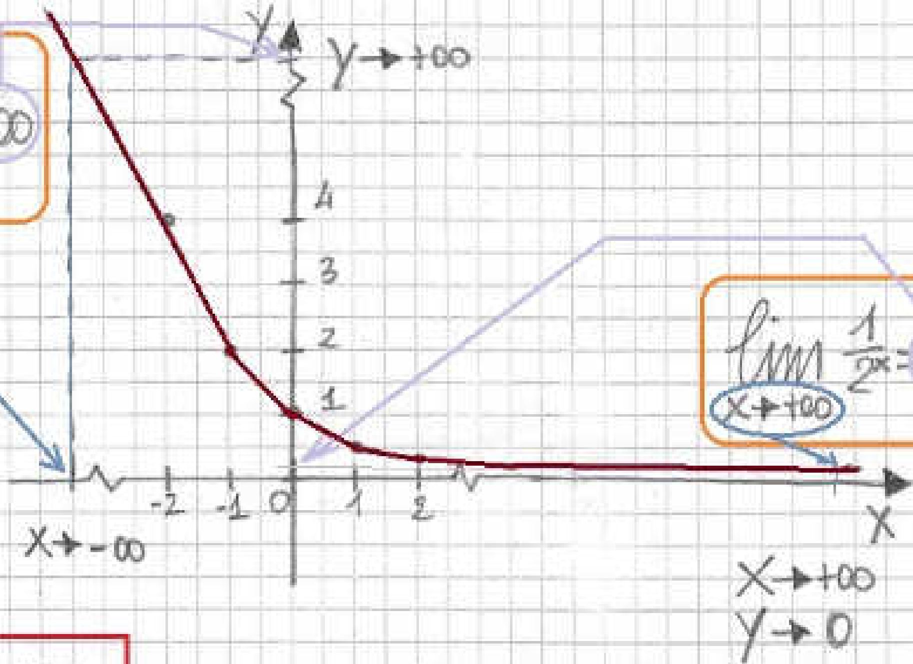
POI: $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2^x} = +\infty}$ $\left(\frac{1}{2^{-\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{+\infty}}} = 2^{+\infty}\right)$

# LA FUNZIONE ESPONENZIALE

E: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ (STESSO DISCORSO DI PRIMA ...)

COSÌ LA CURVA ESPONENZIALE SARÀ:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2^x} = +\infty$

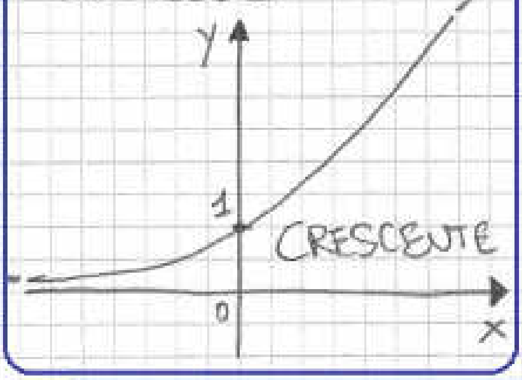



$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$

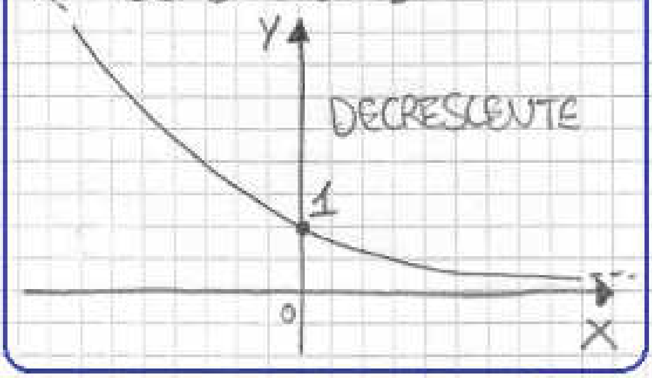
IN GENERALE:

$y = a^x$

SE $a > 1$




SE $0 < a < 1$




SE $a = 1$