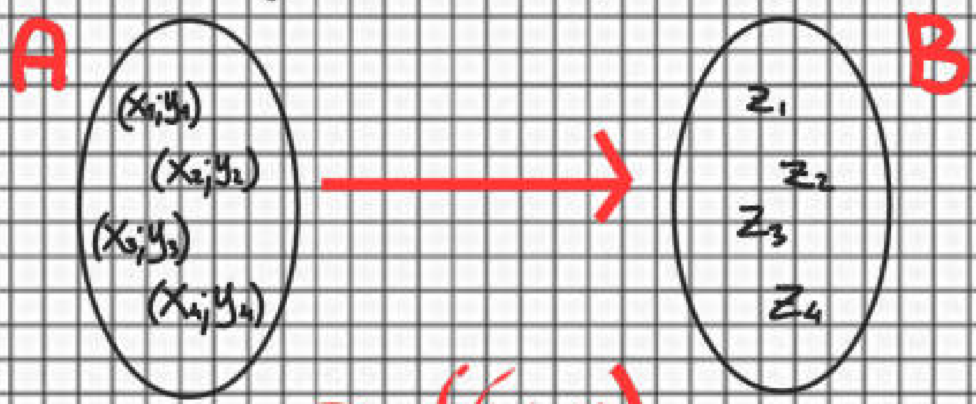
PARTENDO DALLA DEFINIZIONE DI FUNZIONE E CIOÈ UNA LEGGE CHE AD OGNI ELEMENTO DI UN INSIEME A ASSOCIA UNO ED UN SOLO ELEMENTO DI UN ALTRO INSIEME B, POSSIAMO DEFINIRE COME FUNZIONE REALE DI 2 VARIABILI REALI UNA RELAZIONE CHE AD OGNI COPPIA ORDINATA DI NUMERI REALI $(x;y)$ ASSOCIA UNO ED UN SOLO NUMERO REALE z.

GRAFICAMENTE (GRAFICO SAGITTALE):



IN SIMBOLI $z=f(x;y)$

DOVE

1- LA COPPIA ORDINATA $(x;y)$ È UN QUALSIASI ELEMENTO DELL'INSIEME A.

2- z O $(f(x,y))$ È UN ELEMENTO DELL'INSIEME B E SI DICE IMMAGINE DELLA COPPIA $(x;y)$.

3- IL SOTTOINSIEME DI A CHE CONTIENE TUTTE LE COPPIE $(x;y)$ CHE LA FUNZIONE PUÒ ASSUMERE PRENDE IL NOME DI CAMPO DI ESISTENZA O DOMINIO DELLA FUNZIONE.

4- IL SOTTOINSIEME DI B CHE CONTIENE TUTTE LE IMMAGINI DEGLI ELEMENTI DEL DOMINIO PRENDE IL NOME DI CODOMINIO.

LE VARIABILI X E Y SONO DETTE INDIPENDENTI MENTRE LA VARIABILE Z È DETTA DIPENDENTE DA X E Y.

OSSERVAZIONE:

IN MODO ANALOGO SI DEFINISCONO LE FUNZIONI DI 3 O PIÙ VARIABILI REALI.

NEL CASO DELLE FUNZIONI IN UNA VARIABILE REALE

$$y = f(x)$$

VISTO CHE IN ESSE SONO COINVOLTE 2 DIMENSIONI CIOÈ LA X E LA Y, COME SAPPIAMO IL LORO AMBITO È IL PIANO CARTESIANO, LUOGO IN 2 DIMENSIONI (BIDIMENSIONALE).

NEL CASO INVECE DELLE FUNZIONI IN 2 VARIABILI REALI

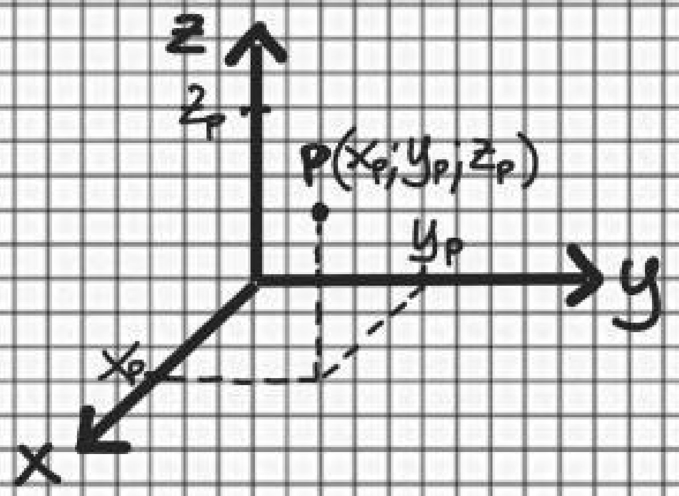
$$z = f(x; y)$$

SONO COINVOLTE 3 DIMENSIONI CIOÈ LA X, LA Y E LA Z, E DI CONSEGUENZA IL LORO AMBITO È LO SPAZIO, LUOGO IN 3 DIMENSIONI (TRIDIMENSIONALE).

SI CONSIDERA QUINDI UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI $Oxyz$ PARTENDO DAL PIANO CARTESIANO COME BASE E TRACCIANDO L'ASSE Z PERPENDICOLARE AL PIANO NELL'ORIGINE. COSÌ OGNI PUNTO P IN QUESTO AMBITO È RAPPRESENTATO DA 3 COORDINATE, UN VALORE PER LA X,

Funzioni in 2 variabili: definizione e dominio (ESEMPI)

UN VALORE PER LA y ED UN VALORE PER LA z:



L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI CHE SCATURISCONO DALLA RELAZIONE

$$z_P=f(x_P;y_P)$$

RAPPRESENTA IL GRAFICO DELLA FUNZIONE. VISTO CHE LA VARIABILE x ASSUME I SUOI VALORI IN $\mathbb{R}$ O UN SUO SOTTOINSIEME E CHE ANCHE LA y ASSUME I SUOI VALORI IN $\mathbb{R}$ O UN SUO SOTTOINSIEME ALLORA IL DOMINIO DELLA FUNZIONE È IL PIANO CARTESIANO DI BASE Oxy, CIOÈ $\mathbb{R}^2$ OPPURE UN SUO SOTTOINSIEME, QUINDI

$$z=f(x;y) \longrightarrow D\subseteq\mathbb{R}^2$$

PER DETERMINARE IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE REALE IN DUE VARIABILI SI PROCEDE COME PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE PARTENDO CIOÈ DAL DOMINIO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI (POLINOMIO, FRAZIONE, RADICE, LOGARITMO, ESPONENZIALE). CALCOLIAMO IL DOMINIO DI ALCUNI ESEMPI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI:

1 FUNZIONE POLINOMIALE

$$z = x^2 + y^2 - xy + 5 \longrightarrow D: \mathbb{R}^2$$

IL DOMINIO È TUTTO IL PIANO CARTESIANO DI BASE, CIOÉ A QUALSIASI COPPIA DI NUMERI REALI $(x;y)$ CORRISPONDE UN VALORE z.

2 FUNZIONE FRATTA

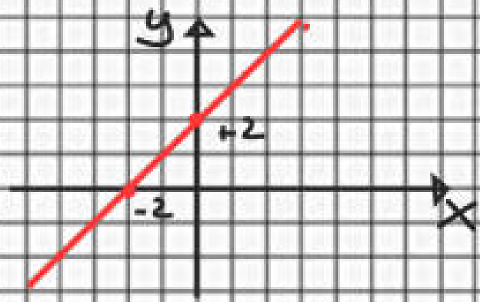
$$z = \frac{N(x;y)}{D(x;y)} = \frac{2x+y}{x-y+2} \longrightarrow D: \mathbb{R}^2 - \{D(x;y) \neq 0\}$$

IL DOMINIO È TUTTO IL PIANO CARTESIANO DI BASE TRANNE I PUNTI (COPPIE x E y) CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE

$$x - y + 2 \neq 0$$

E CIOÈ I PUNTI CHE APPARTENGONO ALLA RETTA

$$y = x + 2$$



3 FUNZIONE RADICE

$$z = \sqrt[n]{R(x;y)}$$

a) SE L'INDICE DELLA RADICE È PARI

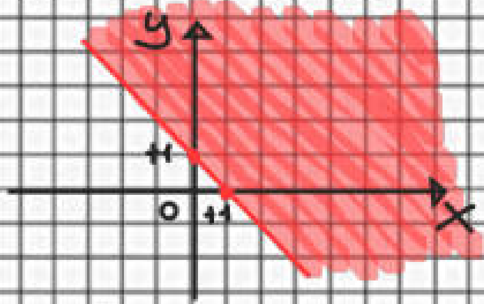
$$z = \sqrt{x+y-1} \longrightarrow D: R(x;y) \geq 0$$

IL DOMINIO È L'INSIEME DEI PUNTI DEL PIANO CHE SODDISFANO LA DISEQUAZIONE

$$x+y-1 \geq 0$$

E CIOÈ I PUNTI CHE APPARTENGONO AL SEMIPIANO CHE NON CONTIENE L'ORIGINE O GENERATO DALLA RETTA

$$y = 1 - x$$



b) SE L'INDICE DELLA RADICE È DISPARI

$$z = \sqrt[3]{x+y-1} \longrightarrow D: \mathbb{R}^2$$

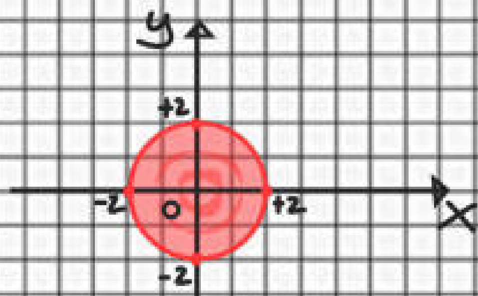
IL DOMINIO È TUTTO IL PIANO CARTESIANO DI BASE, CIOÈ A QUALSIASI COPPIA DI NUMERI REALI $(x;y)$ CORRISPONDE UN VALORE z.

4 FUNZIONE LOGARITMO

$$z = \ln(4-x^2-y^2) \longrightarrow D: 4-x^2-y^2 > 0$$

IL DOMINIO È L'INSIEME DEI PUNTI DEL PIANO CHE SODDISFANO LA DISEQUAZIONE

$$x^2+y^2 < 4$$



E CIOÈ I PUNTI INTERNI ALLA CIRCONFERENZA DI EQUAZIONE

$$x^2+y^2-4=0$$

5 FUNZIONE ESPONENZIALE

$$z = e^{x-y} \longrightarrow D: \mathbb{R}$$

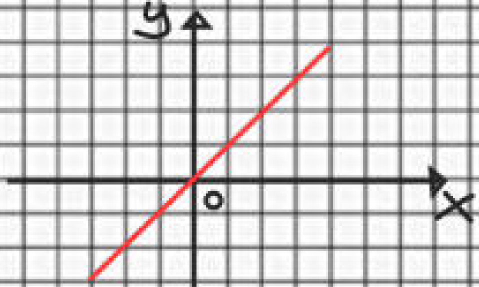
IL DOMINIO È TUTTO IL PIANO CARTESIANO DI BASE, CIOÈ A QUALSIASI COPPIA DI NUMERI REALI $(x;y)$ CORRISPONDE UN VALORE z.

ESEMPI

CALCOLARE IL DOMINIO DELLE SEGUENTI FUNZIONI

1 $z = \dfrac{x+y}{x-y} \Rightarrow D: x-y \neq 0$

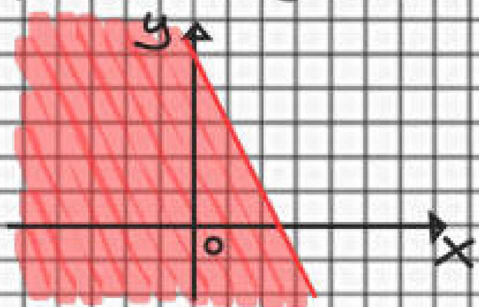
$\Rightarrow x \neq y$



CIOÈ TUTTI I PUNTI DEL PIANO TRANNE QUELLI DELLA RETTA.

2 $z = \dfrac{\sqrt{2x-y+5}}{4} \Rightarrow D: 2x-y+5 \geq 0$

$\Rightarrow y \leq 2x+5$



CIOÈ TUTTI I PUNTI DEL PIANO A SINISTRA DELLA RETTA E COMPRESA LA RETTA.

3 $z = \ln(y^2 - x^2) \Rightarrow D: y^2 - x^2 > 0$

CONSIDERANDO I PRODOTTI NOTEVOLI

$$(y-x)(y+x)>0$$

QUINDI TUTTI I PUNTI $(x;y)$ DEL PIANO CHE SODDISFANO I SEGUENTI DUE SISTEMI

$$\text{I}\begin{cases} y-x>0 \\ y+x>0 \end{cases} \cup \text{II}\begin{cases} y-x<0 \\ y+x<0 \end{cases}$$

CIOÈ

$$\text{I}\begin{cases} y>x \\ y>-x \end{cases} \cup \text{II}\begin{cases} y<x \\ y<-x \end{cases}$$

IL PRIMO SISTEMA È SODDISFATTO PER TUTTI I PUNTI CHE SONO CONTEMPORANEAMENTE AL DI SOPRA DELLE RETTE $y=x$ ED $y=-x$ (BISETTRICI), MENTRE IL SECONDO PER TUTTI I PUNTI CONTEMPORANEAMENTE AL DI SOTTO DELLE STESSE RETTE, QUINDI