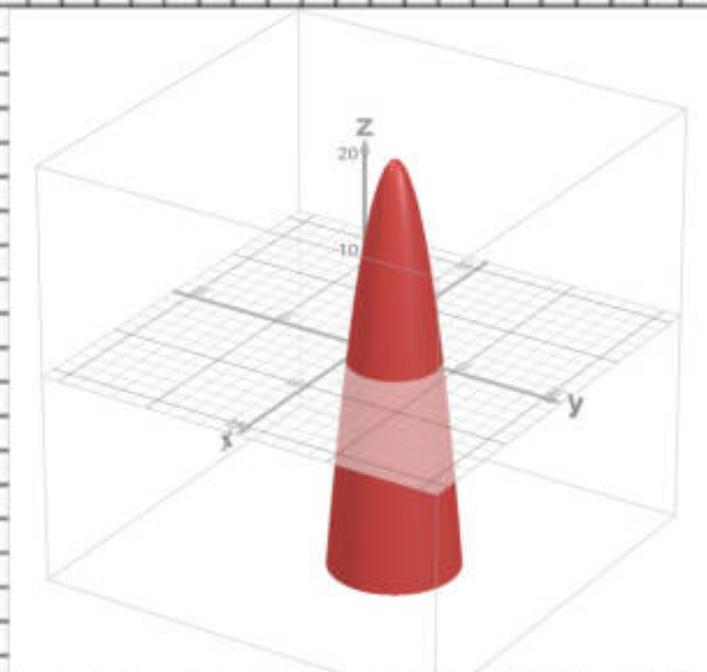


LINEE DI LIVELLO

NELL'AMBITO DI UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI $Oxyz$ VISTO CHE CI TROVIAMO IN UN SISTEMA TRIDIMENSIONALE, DISEGNARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE REALE IN DUE VARIABILI È MOLTO COMPLICATO E PER QUESTO SI RICORRE ALLE **LINEE DI LIVELLO** CHE RAPPRESENTANO LE INTERSEZIONI DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $f(x;y)$ E DEI PIANI PARALLELI A QUELLO DI BASE Oxy PER DIVERSI VALORI DI z . UN ESEMPIO SONO LE CARTE GEOGRAFICHE FISICHE, DOVE VENGONO RAPPRESENTATE LE ZONE GEOGRAFICHE DEI TERRITORI E MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO SI RAPPRESENTANO LE DIVERSE ALTITUDINI. AD ESEMPIO SE CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$z = -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4$$

CHE HA LA SEGUENTE RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



CONSIDERANDO DIVERSI VALORI DI z , SI OTTIENE OGNI VOLTA UNA CURVA NEL PIANO CARTESIANO, CIOÈ DIVERSE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE E RAGGIO DIFFERENTE

$$z = -10$$

$$\Rightarrow -10 = -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4 \Rightarrow -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 14 = 0$$

$$z = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4 \Rightarrow -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4 = 0$$

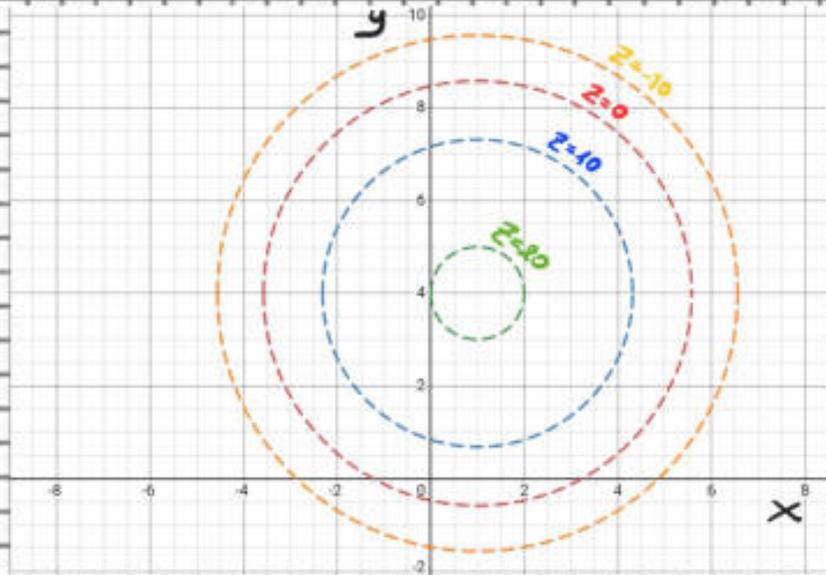
$$z = +10$$

$$\Rightarrow +10 = -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4 \Rightarrow -x^2 - y^2 + 2x + 8y - 6 = 0$$

$$z = +20$$

$$\Rightarrow +20 = -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4 \Rightarrow -x^2 - y^2 + 2x + 8y - 16 = 0$$

OTTENENDO COSÌ UNA SUA VISTA DALL'ALTO



ESEMPI

1

LA FUNZIONE

$$z = 2x - y + 1$$

HA LINEE DI LIVELLO DI EQUAZIONE

$$2x - y + 1 = k$$

CIOÈ

$$y = 2x + 1 - k$$

CHE SONO UN FASCIO DI RETTE PARALLELE CON COEFFICIENTE ANGOLARE PARI A 2, QUINDI:

$$k = -4 \Rightarrow y = 2x + 1 + 4 \Rightarrow y = 2x + 5$$

$$k = -2 \Rightarrow y = 2x + 1 + 2 \Rightarrow y = 2x + 3$$

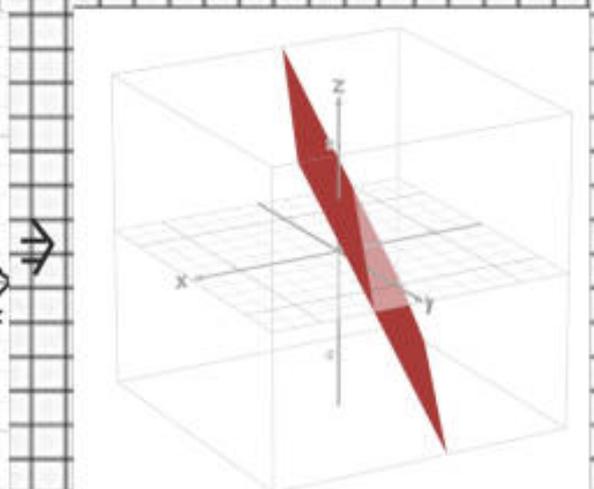
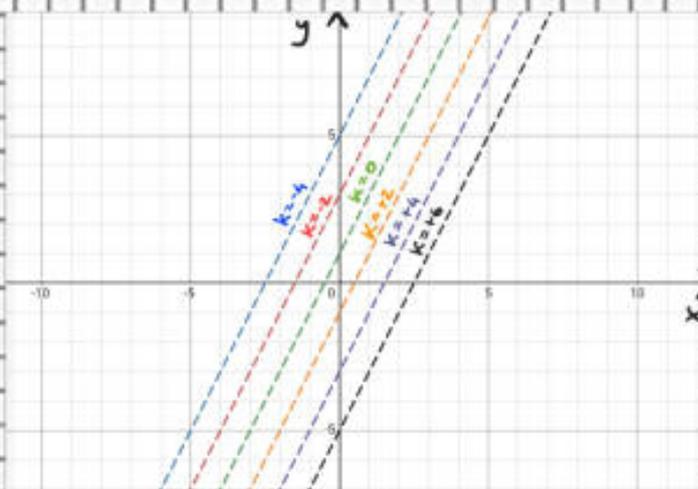
$$k = 0 \Rightarrow y = 2x + 1 + 0 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$k = +2 \Rightarrow y = 2x + 1 - 2 \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$k = +4 \Rightarrow y = 2x + 1 - 4 \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$k = +6 \Rightarrow y = 2x + 1 - 6 \Rightarrow y = 2x - 5$$

CIOÈ:



2

LA FUNZIONE

$$z = x^2 - y - 2x$$

HA LINEE DI LIVELLO DI EQUAZIONE

$$x^2 - y - 2x = k$$

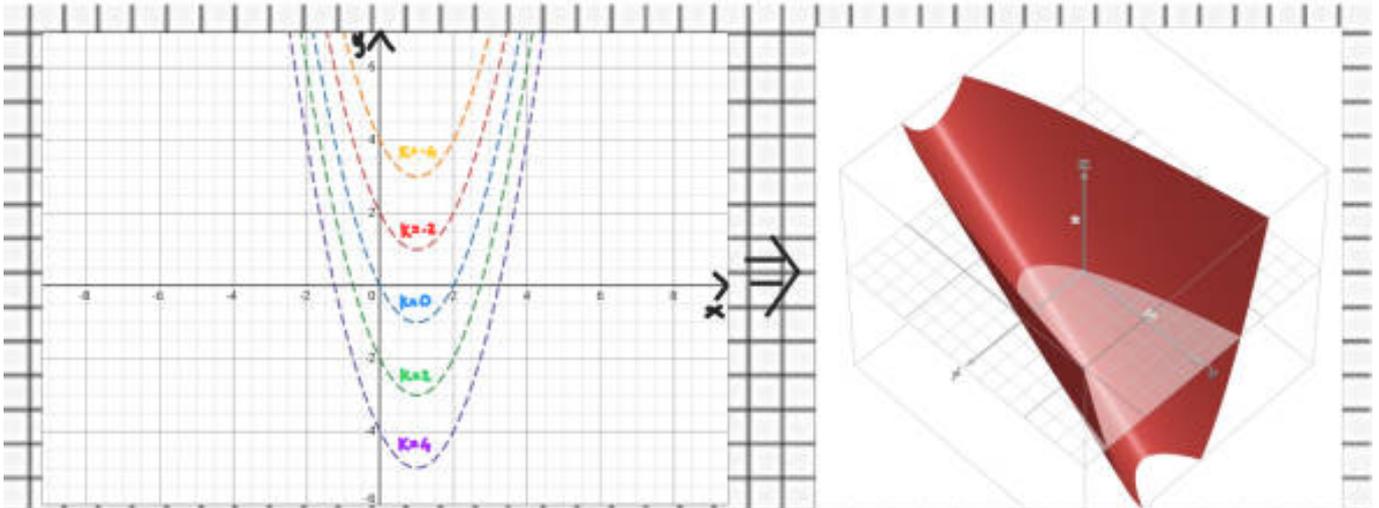
CIOÈ

$$y = x^2 - 2x - k$$

CHE RAPPRESENTA UN FASCIO DI PARABOLE DI VERTICE

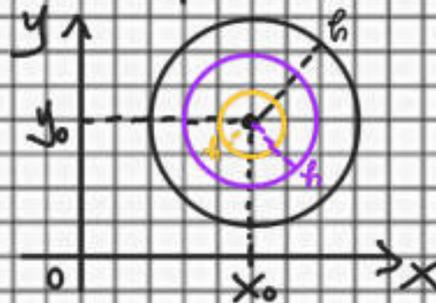
$$V\left(\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, \frac{-(4+4k)}{4 \cdot 1}\right) \Rightarrow V(1; -1-k)$$

ED ASSE DI SIMMETRIA CON EQUAZIONE $x = 1$, QUINDI



LIMITI

IL CONCETTO DI INTORNO DI UN PUNTO UNIDIMENSIONALE SI PUÒ ESTENDERE FACILMENTE AD UN PUNTO BIDIMENSIONALE $P_0(x_0; y_0)$ CONSIDERANDO UNA QUALSIASI CIRCONFERENZA DI RAGGIO ARBITRARIO PARI AD δ (VALORE MOLTO PICCOLO) E CENTRO PROPRIO IN P_0 , CIOÈ



DI CONSEGUENZA POSSIAMO ESTENDERE IL CONCETTO DI LIMITE DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE CON DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}$ AD UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI CON DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^2$, MEDIANTE LA SCRITTURA:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

E SI LEGGE **LIMITE PER IL PUNTO P DI COORDINATE**

$(x; y)$ CHE TENDE AL PUNTO P_0 DI COORDINATE $(x_0; y_0)$ DELLA FUNZIONE $f(x; y)$ -

IN PRATICA CI DICE QUANTO VALE LA FUNZIONE IN UN INTORNO DEL PUNTO $P_0(x_0; y_0)$ -

NATURALMENTE ANCHE IL CONCETTO DI LIMITE A $\pm\infty$ DELLE FUNZIONI IN UNA VARIABILE SI PUÒ ESTENDERE ALLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI MEDIANTE LA SCRITTURA:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \pm\infty}} f(x; y)$$

CONTINUITÀ

ANCHE IL CONCETTO DI CONTINUITÀ PUÒ ESSERE ESTESO ALLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI -

CONSIDERATA UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE

$$y = f(x)$$

SAPPIAMO CHE ESSA È CONTINUA NEL PUNTO x_0 SE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

E QUINDI SARÀ CONTINUA IN TUTTO IL SUO DOMINIO SE È CONTINUA IN OGNI PUNTO DEL DOMINIO -

CONSIDERATA INVECE UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI

$$z = f(x; y)$$

ESSA È CONTINUA NEL PUNTO $P_0(x_0; y_0)$ SE

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$

ESEMPI

UTILIZZANDO LA PROPRIETÀ DEI LIMITI DI FUNZIONI CONTINUE CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI

$$1 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x+y}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

LA FUNZIONE HA DOMINIO PARI A

$$z = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow D: x-y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$$

QUINDI SI HA

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{0+2}{0-2} = -1 \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (0;2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = +\infty \Rightarrow \text{DISCONTINUA IN } (1,1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{2+0}{2-0} = 1 \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (2;0)$$

$$2 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{x+5}{2y-1} \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (5,0)} \frac{x+5}{2y-1} \quad ; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1;\frac{1}{2})} \frac{x+5}{2y-1}$$

LA FUNZIONE HA DOMINIO PARI A

$$z = \frac{x+5}{2y-1} \Rightarrow D: 2y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{1}{2}$$

QUINDI SI HA

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{x+5}{2y-1} = \frac{3+5}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (3,2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-5,0)} \frac{x+5}{2y-1} = \frac{-5+5}{2 \cdot 0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (-5,0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{1}{2})} \frac{x+5}{2y-1} = \frac{1+5}{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{6}{0} = +\infty \Rightarrow \text{DISCONTINUA IN } (1, \frac{1}{2})$$

DERIVATE PARZIALI

ABBIAMO VISTO CHE PER STUDIARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE MEDIANTE LA DERIVATA (PRIMA E SECONDA) POSSIAMO STABILIRE QUANDO LA FUNZIONE CRESCE O DECRESCA, SE ESISTONO PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO ECCETERA -

NEL CASO DELLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI NON ESISTE UNA UNICA DERIVATA MA SI POSSONO DETERMINARE DUE DERIVATE DETTE **DERIVATE PARZIALI**, UNA RISPETTO ALLA x CONSIDERANDO LA y COME UNA COSTANTE ED UNA RISPETTO ALLA y CONSIDERANDO LA x COME UNA COSTANTE -

RIPRENDENDO QUINDI IL CONCETTO DI DERIVATA COME IL LIMITE PER h CHE TENDE A 0 DEL RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE, CIOÈ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ALLORA NEL CASO DELLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI FISSANDO y COME COSTANTE E CONSIDERANDO L'INCREMENTO RISPETTO ALLA SOLA x , SI OTTIENE LA **DERIVATA PARZIALE** DELLA FUNZIONE **RISPETTO AD x** , CIOÈ

$$f'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h; y) - f(x; y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

VICEVERSA, FISSANDO x COME COSTANTE SI OTTIENE LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD y :

$$f'_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x; y+h) - f(x; y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

PER IL LORO CALCOLO VALGONO LE STESSEREGOLE DELLE DERIVATE PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE.

ESEMPI

1 DATA LA FUNZIONE

$$z = x^2 + 3xy - 2y^2 + x - 3y \quad \text{CON } D: \mathbb{R}^2$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO:

$$z'_x = 2x + 3y + 1$$

$$z'_y = 3x - 4y - 3$$

2 DATA LA FUNZIONE

$$z = (1+y)^x \quad \text{CON } D: 1+y > 0 \Rightarrow y > -1$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO:

$$z'_x = (1+y)^x \cdot \ln(1+y)$$

$$z'_y = x(1+y)^{x-1}$$

3 DATA LA FUNZIONE

$$z = \frac{xy}{x+y} \quad \text{CON } D: x \neq -y$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO

$$z_x = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{\cancel{xy} + y^2 - \cancel{xy}}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$z_y = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy}}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

4 DATA LA FUNZIONE

$$z = \sqrt{x-y}$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

$$z_y = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

5 DATA LA FUNZIONE

$$z = \ln(x^2 - xy)$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO

$$z_x = \frac{1}{x^2 - xy} \cdot (2x - y) = \frac{2x - y}{x^2 - xy}$$

$$z_y = \frac{1}{x^2 - xy} \cdot (-x) = \frac{-x}{x^2 - xy} = \frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}(-x+y)} = \frac{1}{y-x}$$

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE SUPERIORE

LE DERIVATE PARZIALI SONO ANCH'ESSE FUNZIONI DELLE STESSSE VARIABILI E QUINDI POSSONO A LORO VOLTA ESSERE DERIVATE DETERMINANDO COSÌ LE DERIVATE SECONDE.

COSÌ SE LA FUNZIONE $z = f(x, y)$ AMMETTE LE DERIVATE PARZIALI PRIME, DERIVABILI A LORO VOLTA, ALLORA VALE LA RELAZIONE

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

CIÒÈ SECONDO IL **TEOREMA DI SCHWARZ (TEOREMA DELL'INVERSIONE DELL'ORDINE DI DERIVAZIONE)** LE DUE DERIVATE MISTE (TRANNE IN ALCUNI PARTICOLARI PUNTI) RISULTANO UGUALI.

ESEMPIO

DATA LA FUNZIONE

$$z = x^2 + 3xy - 2y^2 + x - 3y$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO:

$$z'_x = 2x + 3y + 1$$

$$z'_y = 3x - 4y - 3$$

ALORO VOLTA ANCORA DERIVABILI, COSÌ

$$z''_{xx} = 2 \quad \text{E} \quad z''_{xy} = 3$$

MENTRE

$$z''_{yx} = 3 \quad \text{E} \quad z''_{yy} = -4$$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE $f(x,y)$

TRALASCIANDO IL CONCETTO GEOMETRICO DI DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE $z=f(x,y)$, RICORDANDO SOLO CHE SE UNA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO P_0 ALLORA È CONTINUA IN P_0 , DATA UNA GENERICA FUNZIONE REALE IN DUE VARIABILI REALI, SI DEFINISCE **DIFFERENZIALE TOTALE** LA RELAZIONE:

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

CIÒ È SE LA **VARIAZIONE INFINITESIMA** DELLA FUNZIONE È RIFERITA AD UN PUNTO $P_0(x_0, y_0)$ DEL DOMINIO, IL DIFFERENZIALE TOTALE DELLA FUNZIONE NEL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$ È DATO DA:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy$$

DOVE ANALOGAMENTE A QUANTO ACCADE PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE, SE GLI INCREMENTI FANNO RIFERIMENTO A VARIAZIONI INFINITESIME QUESTI SI INDICANO CON LA NOTAZIONE DEI DIFFERENZIALI, CIÒ È

$$x - x_0 = \Delta x \rightarrow dx \quad \text{INCREMENTO VARIABILE } x$$

$$y - y_0 = \Delta y \rightarrow dy \quad \text{INCREMENTO VARIABILE } y$$

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \Delta f \quad \text{INCREMENTO DELLA FUNZIONE}$$

E ALTENDERE A ZERO DEGLI INCREMENTI DELLE VARIABILI SI HA CHE

$$\Delta f \approx df$$

ESEMPI

1) CONSIDERATA LA FUNZIONE

$$z = x^{0,3} \cdot y^{0,7}$$

E IL PUNTO

$$P(1,05; 1,04)$$

DETERMINIAMO UN VALORE APPROSSIMATO DELLA FUNZIONE PER IL PUNTO P

2) CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI DI Z:

$$z'_x = 0,3 \cdot x^{0,3-1} \cdot y^{0,7} = 0,3 x^{-0,7} \cdot y^{0,7}$$

$$z'_y = x^{0,3} \cdot 0,7 y^{0,7-1} = 0,7 x^{0,3} y^{-0,3}$$

3) SCEGLIAMO UN PUNTO P_0 CON COORDINATE INTERE MOLTO VICINO AL PUNTO P, PER ESEMPIO

$$P_0(1; 1)$$

E CALCOLIAMO IL VALORE DI Z, CIOÈ

$$f(P_0) = 1^{0,3} \cdot 1^{0,7} = 1$$

4) DETERMINIAMO IL DIFFERENZIALE DI f

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

CIOÈ

$$df = 0,3 x^{-0,7} y^{0,7} dx + 0,7 x^{0,3} y^{-0,3} dy$$

E LO CALCOLIAMO NEL PUNTO P_0

$$df = 0,3 \cdot 1^{-0,7} \cdot 1^{0,7} dx + 0,7 \cdot 1^{0,3} \cdot 1^{-0,3} dy$$

OTTENENDO

$$(df)_{P_0} = 0,3 dx + 0,7 dy$$

d) CONSIDERIAMO GLI INCREMENTI

$$\Delta x = x_p - x_{p_0} = 1,05 - 1 = 0,05$$

$$\Delta y = y_p - y_{p_0} = 1,04 - 1 = 0,04$$

E CALCOLIAMO PER APPROSSIMAZIONE L'INCREMENTO DELLA FUNZIONE

$$\Delta f = f(p) - f(p_0) \approx f'_x(p_0) \Delta x + f'_y \Delta y$$

$$\Delta f = f(p) - f(p_0) \approx 0,3 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,04 = 0,043$$

e) OTTIENIAMO COSÌ PER APPROSSIMAZIONE ANCHE IL VALORE DELLA FUNZIONE NEL PUNTO P, CIOÈ

$$\Delta f = f(p) - f(p_0) \Rightarrow f(p) = f(p_0) + \Delta f$$

COSÌ

$$f(p) \approx 1 + 0,43 = 1,043$$

OSSERVAZIONE:

TALE VALORE COINCIDE CON QUELLO DELLA FUNZIONE CALCOLATA NEL PUNTO P, ARROTONDATO ALLA TERZA CIFRA DECIMALE:

$$f(p) = 1,05^{0,3} \cdot 1,04^{0,7} = 1,0429899585 \approx 1,043$$

2 CALCOLIAMO IL DIFFERENZIALE DELLA SEGUENTE FUNZIONE NEL GENERICO PUNTO (X; y)

$$z = \frac{x^2 - x}{y}$$

IL DOMINIO DELLA FUNZIONE È

$$D = \mathbb{R}^2 - \{y=0\}$$

LE DERIVATE PARZIALI SONO

$$z'_x = \frac{2x-1}{y}$$

$$z'_y = \frac{-x^2+x}{y^2} = -\frac{x^2-x}{y^2}$$

IL DIFFERENZIALE TOTALE È

$$df = \frac{2x-1}{y} dx - \frac{x^2-x}{y^2} dy$$

3

CALCOLARE IL DIFFERENZIALE TOTALE DELLA SEGUENTE FUNZIONE

$$z = x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI

$$z'_x = 2x - 2$$

$$z'_y = -2y + 2$$

IL DIFFERENZIALE TOTALE È

$$dz = (2x-2)dx + (-2y+2)dy$$

4

CALCOLARE IL DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy = \frac{2x dx + 2y dy}{x^2 + y^2}$$