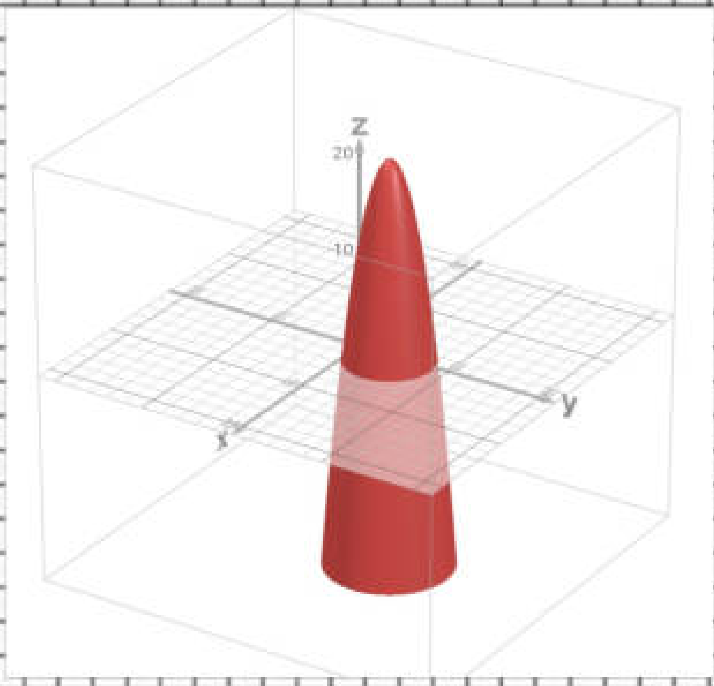
LINEE DI LIVELLO

NELL'AMBITO DI UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI ORTOGONALI Oxyz VISTO CHE CI TROVIAMO IN UN SISTEMA TRIDIMENSIONALE, DISEGNARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE REALE IN DUE VARIABILI È MOLTO COMPLICATO E PER QUESTO SI RICORRE ALLE LINEE DI LIVELLO CHE RAPPRESENTANO LE INTERSEZIONI DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $f(x;y)$ E DEI PIANI PARALLELI A QUELLO DI BASE Oxy PER DIVERSI VALORI DI z. UN ESEMPIO SONO LE CARTE GEOGRAFICHE FISICHE, DOVE VENGONO RAPPRESENTATE LE ZONE GEOGRAFICHE DEI TERRITORI E MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO SI RAPPRESENTANO LE DIVERSE ALTITUDINI.

AD ESEMPIO SE CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$z = -x^2 - y^2 + 2x + 8y + 4$$

CHE HA LA SEGUENTE RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



CONSIDERANDO DIVERSI VALORI DI z, SI OTTIENE OGNI VOLTA UNA CURVA NEL PIANO CARTESIANO, CIOÈ DIVERSE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE E RAGGIO DIFFERENTE

$z=-10$

$\Rightarrow -10=-x^2-y^2+2x+8y+4 \Rightarrow -x^2-y^2+2x+8y+14=0$

$z=0$

$\Rightarrow 0=-x^2-y^2+2x+8y+4 \Rightarrow -x^2-y^2+2x+8y+4=0$

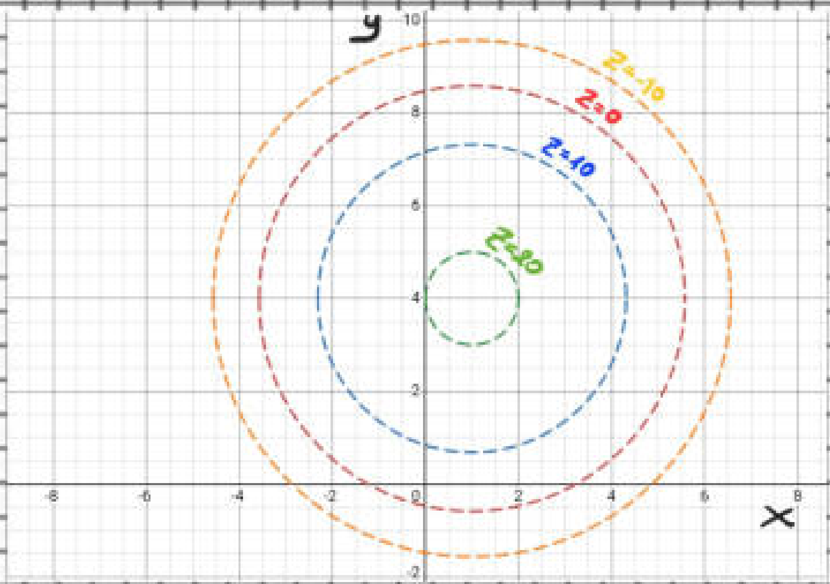
$z=+10$

$\Rightarrow +10=-x^2-y^2+2x+8y+4 \Rightarrow -x^2-y^2+2x+8y-6=0$

$z=+20$

$\Rightarrow +20=-x^2-y^2+2x+8y+4 \Rightarrow -x^2-y^2+2x+8y-16=0$

OTTENENDO COSÌ UNA SUA VISTA DALL'ALTO



ESEMPI

1 LA FUNZIONE

$$z=2x-y+1$$

HA LINEE DI LIVELLO DI EQUAZIONE

$$2x-y+1=k$$

CIOÈ

$$y=2x+1-k$$

CHE SONO UN FASCIO DI RETTE PARALLELE CON COEFFICIENTE ANGOLARE PARI A 2, QUINDI:

$k=-4 \Rightarrow y=2x+1+4 \Rightarrow y=2x+5$

$k=-2 \Rightarrow y=2x+1+2 \Rightarrow y=2x+3$

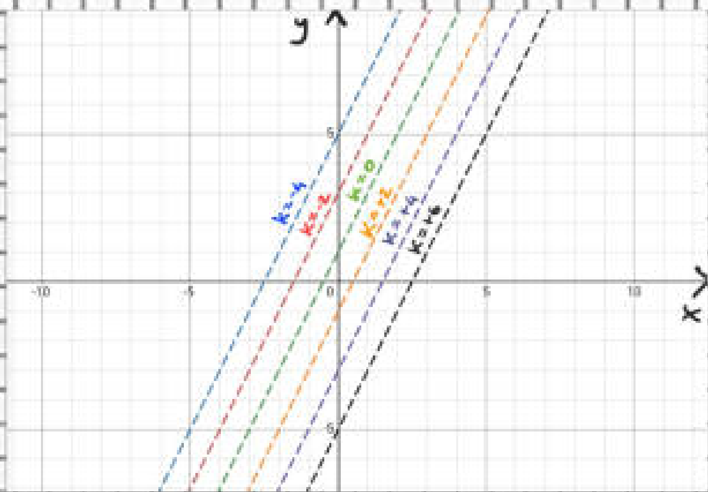
$k=0 \Rightarrow y=2x+1+0 \Rightarrow y=2x+1$

$k=+2 \Rightarrow y=2x+1-2 \Rightarrow y=2x-1$

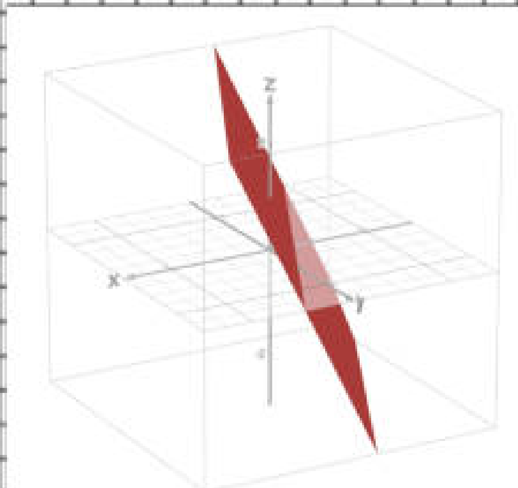
$k=+4 \Rightarrow y=2x+1-4 \Rightarrow y=2x-3$

$k=+6 \Rightarrow y=2x+1-6 \Rightarrow y=2x-5$

CIOÈ:



$\Rightarrow$



2 LA FUNZIONE

$$z=x^2-y-2x$$

HA LINEE DI LIVELLO DI EQUAZIONE

$$x^2-y-2x=k$$

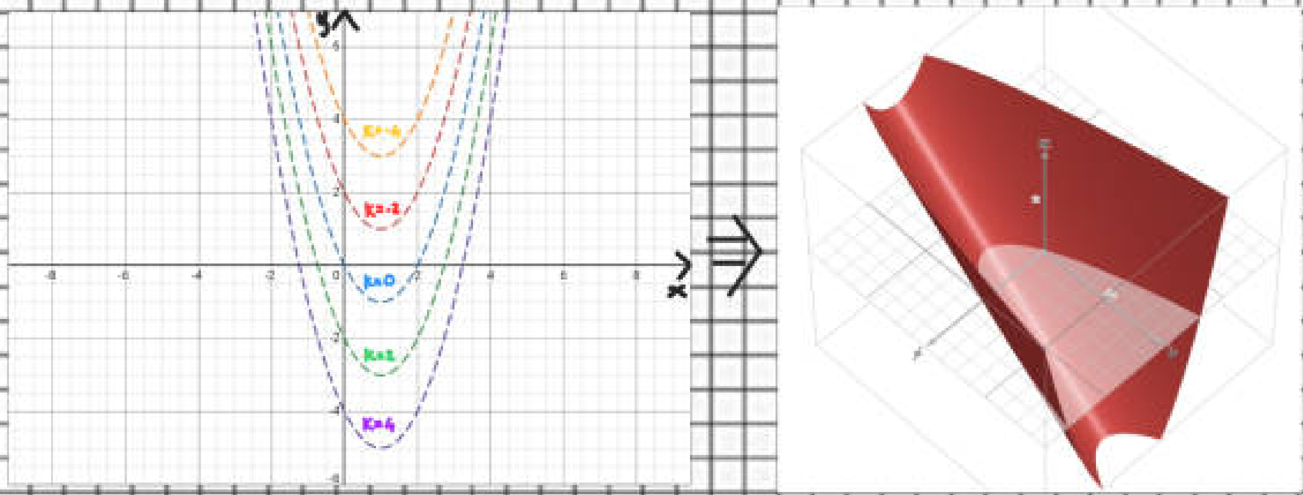
CIOÈ

$$y=x^2-2x-k$$

CHE RAPPRESENTA UN FASCIO DI PARABOLE DI VERTICE

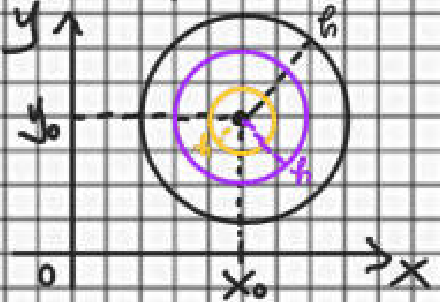
$$V\left(\frac{-(-2)}{2\cdot 1};\frac{-(4+4k)}{4\cdot 1}\right)\Rightarrow V(1;-1-k)$$

ED ASSE DI SIMMETRIA CON EQUAZIONE $x=1$, QUINDI



LIMITI

IL CONCETTO DI INTORNO DI UN PUNTO UNIDIMENSIONALE SI PUÒ ESTENDERE FACILMENTE AD UN PUNTO BIDIMENSIONALE $P_0(x_0;y_0)$ CONSIDERANDO UNA QUALSIASI CIRCONFERENZA DI RAGGIO ARBITRARIO PARI AD δ (VALORE MOLTO PICCOLO) E CENTRO PROPRIO IN P_0, CIOÈ



DI CONSEGUENZA POSSIAMO ESTENDERE IL CONCETTO DI LIMITE DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE CON DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}$ AD UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI CON DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^2$, MEDIANTE LA SCRITTURA:

$$\boxed{\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)}$$

E SI LEGGE LIMITE PER IL PUNTO P DI COORDINATE

$(X;Y)$ CHE TENDE AL PUNTO P_0 DI COORDINATE $(X_0;Y_0)$ DELLA FUNZIONE $f(X;Y)$.

IN PRATICA CI DICE QUANTO VALE LA FUNZIONE IN UN INTORNO DEL PUNTO $P_0(X_0;Y_0)$.

NATURALMENTE ANCHE IL CONCETTO DI LIMITE A $\pm\infty$ DELLE FUNZIONI IN UNA VARIABILE SI PUÒ ESTENDERE ALLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI MEDIANTE LA SCRITTURA:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty}} f(x;y)}$$

CONTINUITÁ

ANCHE IL CONCETTO DI CONTINUITÁ PUÒ ESSERE ESTESO ALLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI.

CONSIDERATA UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE

$$y = f(x)$$

SAPPIAMO CHE ESSA È CONTINUA NEL PUNTO X_0 SE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

E QUINDI SARÁ CONTINUA IN TUTTO IL SUO DOMINIO SE È CONTINUA IN OGNI PUNTO DEL DOMINIO.

CONSIDERATA INVECE UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI

$$z = f(x;y)$$

ESSA È CONTINUA NEL PUNTO $P_0(X_0;Y_0)$ SE

$$\lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0)$$

ESEMPI

UTILIZZANDO LA PROPRIETÀ DEI LIMITI DI FUNZIONI CONTINUE CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI

1 $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x+y}{x-y}$; $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x-y}$; $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x+y}{x-y}$;

LA FUNZIONE HA DOMINIO PARI A

$$z=\frac{x+y}{x-y} \Rightarrow D: x-y\neq 0 \Rightarrow x\neq y$$

QUINDI SI HA

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x+y}{x-y}=\frac{0+2}{0-2}=-1 \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (0;2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x-y}=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0}=+\infty \Rightarrow \text{DISCONTINUA IN } (1;1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x+y}{x-y}=\frac{2+0}{2-0}=1 \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (2;0)$$

2 $\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{x+5}{2y-1}$; $\lim_{(x,y)\to(5,0)} \frac{x+5}{2y-1}$; $\lim_{(x,y)\to(1,\frac{1}{2})} \frac{x+5}{2y-1}$;

LA FUNZIONE HA DOMINIO PARI A

$$z=\frac{x+5}{2y-1} \Rightarrow D: 2y-1\neq 0 \Rightarrow y\neq \frac{1}{2}$$

QUINDI SI HA

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{x+5}{2y-1}=\frac{3+5}{2\cdot 2-1}=\frac{8}{3} \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (3;2)$$

$$\lim_{(x;y)\to(-5;0)} \frac{x+5}{2y-1} = \frac{-5+5}{2 0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \text{CONTINUA IN } (-5;0)$$

$$\lim_{(x;y)\to(1;\frac{1}{2})} \frac{x+5}{2y-1} = \frac{1+5}{2\frac{1}{2}-1} = \frac{6}{0} = \infty \Rightarrow \text{DISCONTINUA IN } (1;\tfrac{1}{2})$$

DERIVATE PARZIALI

ABBIAMO VISTO CHE PER STUDIARE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UNA VARIABILE MEDIANTE LA DERIVATA (PRIMA E SECONDA) POSSIAMO STABILIRE QUANDO LA FUNZIONE CRESCE O DECRESCE, SE ESISTONO PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO ECCETERA.

NEL CASO DELLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI NON ESISTE UNA UNICA DERIVATA MA SI POSSONO DETERMINARE DUE DERIVATE DETTE DERIVATE PARZIALI, UNA RISPETTO ALLA X CONSIDERANDO LA Y COME UNA COSTANTE ED UNA RISPETTO ALLA Y CONSIDERANDO LA X COME UNA COSTANTE.

RIPRENDENDO QUINDI IL CONCETTO DI DERIVATA COME IL LIMITE PER h CHE TENDE A $\emptyset$ DEL RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE, CIOÈ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ALLORA NEL CASO DELLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI FISSANDO Y COME COSTANTE E CONSIDERANDO L'INCREMENTO RISPETTO ALLA SOLA X, SI OTTIENE LA DERIVATA PARZIALE DELLA FUNZIONE RISPETTO AD X, CIOÈ

$$\boxed{f'_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h;y)-f(x;y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}}$$

VICEVERSA, FISSANDO X COME COSTANTE SI OTTIENE LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD y:

$$\boxed{f'_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(x;y+h)-f(x;y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}}$$

PER IL LORO CALCOLO VALGONO LE STESSE REGOLE DELLE DERIVATE PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE.

ESEMPI

1 DATA LA FUNZIONE

$$z = x^2+3xy-2y^2+x-3y \quad \text{CON } D: \mathbb{R}^2$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO:

$$z'_x = 2x+3y+1$$

$$z'_y = 3x-4y-3$$

2 DATA LA FUNZIONE

$$z = (1+y)^x \quad \text{CON } D: 1+y>0 \Rightarrow y>-1$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO:

$$z'_x = (1+y)^x \cdot \ln(1+y)$$

$$z'_y = x(1+y)^{x-1}$$

3 DATA LA FUNZIONE

$$z = \frac{xy}{x+y} \quad \text{CON } D: x = -y$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO

$$z_x = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{\cancel{xy} + y^2 - \cancel{xy}}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$z_y = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy}}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

4 DATA LA FUNZIONE

$$z = \sqrt{x-y}$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

$$z_y = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

5 DATA LA FUNZIONE

$$z = \ln(x^2 - xy)$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO

$$z_x = \frac{1}{x^2 - xy} \cdot (2x - y) = \frac{2x - y}{x^2 - xy}$$

$$z_y = \frac{1}{x^2 - xy} \cdot (-x) = \frac{-x}{x^2 - xy} = \frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}(-x+y)} = \frac{1}{y-x}$$

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE SUPERIORE

LE DERIVATE PARZIALI SONO ANCH'ESSE FUNZIONI DELLE STESSE VARIABILI E QUINDI POSSONO A LORO VOLTA ESSERE DERIVATE DETERMINANDO COSÍ LE DERIVATE SECONDE.
COSÍ SE LA FUNZIONE $z=f(x;y)$ AMMETTE LE DERIVATE PARZIALI PRIME, DERIVABILI A LORO VOLTA, ALLORA VALE LA RELAZIONE

$$f''_{xy}=f''_{yx}$$

CIOÉ SECONDO IL TEOREMA DI SCHWARZ (TEOREMA DELL'INVERSIONE DELL'ORDINE DI DERIVAZIONE) LE DUE DERIVATE MISTE (TRANNE IN ALCUNI PARTICOLARI PUNTI) RISULTANO UGUALI.

ESEMPIO

DATA LA FUNZIONE

$$z=x^2+3xy-2y^2+x-3y$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME SONO:

$$z'_x=2x+3y+1$$

$$z'_y=3x-4y-3$$

A LORO VOLTA ANCORA DERIVABILI, COSÍ

$$z''_{xx}=2 \quad \text{E} \quad \boxed{z''_{xy}=3}$$

MENTRE

$$\boxed{z''_{yx}=3} \quad \text{E} \quad z''_{yy}=-4$$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE $f(x;y)$

TRALASCIANDO IL CONCETTO GEOMETRICO DI DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE $z=f(x;y)$, RICORDANDO SOLO CHE SE UNA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO P_0 ALLORA È CONTINUA IN P_0, DATA UNA GENERICA FUNZIONE REALE IN DUE VARIABILI REALI, SI DEFINISCE DIFFERENZIALE TOTALE LA RELAZIONE:

$$\boxed{df = f'_x dx + f'_y dy}$$

CIOÈ SE LA VARIAZIONE INFINITESIMA DELLA FUNZIONE È RIFERITA AD UN PUNTO $P_0(x_0;y_0)$ DEL DOMINIO, IL DIFFERENZIALE TOTALE DELLA FUNZIONE NEL PUNTO $P_0(x_0;y_0)$ È DATO DA:

$$\boxed{df(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy}$$

DOVE ANALOGAMENTE A QUANTO ACCADE PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE, SE GLI INCREMENTI FANNO RIFERIMENTO A VARIAZIONI INFINITESIME QUESTI SI INDICANO CON LA NOTAZIONE DEI DIFFERENZIALI, CIOÈ

$x-x_0 = \Delta x \rightarrow dx$ INCREMENTO VARIABILE x

$y-y_0 = \Delta y \rightarrow dy$ INCREMENTO VARIABILE y

$f(x;y)-f(x_0;y_0) = \Delta f$ INCREMENTO DELLA FUNZIONE

E AL TENDERE A ZERO DEGLI INCREMENTI DELLE VARIABILI SI HA CHE

$$\Delta f \approx df$$

ESEMPI

1 CONSIDERATA LA FUNZIONE

$$z = x^{0,3} \cdot y^{0,7}$$

E IL PUNTO $P(1{,}05; 1{,}04)$

DETERMINIAMO UN VALORE APPROSSIMATO DELLA FUNZIONE PER IL PUNTO P

a) CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI DI z:

$$z'_x = 0{,}3 \cdot x^{0,3-1} \cdot y^{0,7} = 0{,}3 x^{-0,7} \cdot y^{0,7}$$

$$z'_y = x^{0,3} \cdot 0{,}7 y^{0,7-1} = 0{,}7 x^{0,3} y^{-0,3}$$

b) SCEGLIAMO UN PUNTO P_0 CON COORDINATE INTERE MOLTO VICINO AL PUNTO P, PER ESEMPIO

$$P_0(1;1)$$

E CALCOLIAMO IL VALORE DI z, CIOÈ

$$f(P_0) = 1^{0,3} \cdot 1^{0,7} = 1$$

c) DETERMINIAMO IL DIFFERENZIALE DI f

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

CIOÈ

$$df = 0{,}3 x^{-0,7} y^{0,7} dx + 0{,}7 x^{0,3} y^{-0,3} dy$$

E LO CALCOLIAMO NEL PUNTO P_0

$$df = 0{,}3 \cdot 1^{-0,7} \cdot 1^{0,7} dx + 0{,}7 \cdot 1^{0,3} \cdot 1^{-0,3} dy$$

OTTENENDO

$$(df)_{P_0} = 0{,}3\, dx + 0{,}7\, dy$$

d) CONSIDERIAMO GLI INCREMENTI

$$\Delta x = x_P - x_{P_0} = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$$
$$\Delta y = y_P - y_{P_0} = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$$

E CALCOLIAMO PER APPROSSIMAZIONE L'INCREMENTO DELLA FUNZIONE

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx f'_x(P_0)\Delta x + f'_y \Delta y$$
$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}7 \cdot 0{,}04 = 0{,}043$$

e) OTTENIAMO COSÌ PER APPROSSIMAZIONE ANCHE IL VALORE DELLA FUNZIONE NEL PUNTO P, CIOÈ

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \Rightarrow f(P) = f(P_0) + \Delta f$$

COSÌ

$$\boxed{f(P) \approx 1 + 0{,}43 = 1{,}043}$$

OSSERVAZIONE:

TALE VALORE COINCIDE CON QUELLO DELLA FUNZIONE CALCOLATA NEL PUNTO P, ARROTONDATO ALLA TERZA CIFRA DECIMALE:

$$f(P) = 1{,}05^{0{,}3} \cdot 1{,}04^{0{,}7} = 1{,}042989585 \approx 1{,}043$$

2 CALCOLIAMO IL DIFFERENZIALE DELLA SEGUENTE FUNZIONE NEL GENERICO PUNTO $(x;y)$

$$z = \frac{x^2 - x}{y}$$

IL DOMINIO DELLA FUNZIONE È

$$D = \mathbb{R}^2 - \{y = 0\}$$

LE DERIVATE PARZIALI SONO

$$z'_x = \frac{2x-1}{y} \qquad z'_y = \frac{-x^2+x}{y^2} = -\frac{x^2-x}{y^2}$$

IL DIFFERENZIALE TOTALE È

$$\boxed{df = \frac{2x-1}{y}\,dx - \frac{x^2-x}{y^2}\,dy}$$

3 CALCOLARE IL DIFFERENZIALE TOTALE DELLA SEGUENTE FUNZIONE

$$z = x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI

$$z'_x = 2x - 2 \qquad z'_y = -2y + 2$$

IL DIFFERENZIALE TOTALE È

$$dz = (2x-2)\,dx + (-2y+2)\,dy$$

4 CALCOLARE IL DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{2x\,dx + 2y\,dy}{x^2+y^2}$$