MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

PENSANDO AD ESEMPIO AL PROBLEMA IN CAMPO ECONOMICO DI MINIMIZZARE I COSTI O MASSIMIZZARE GLI UTILI, ALLORA ANCHE NELLO STUDIO DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI, COME PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE, C'È LA NECESSITÀ DI DETERMINARE PER QUALI VALORI DELLE VARIABILI LA FUNZIONE ASSUME UN VALORE PIÙ GRANDE O UN VALORE PIÙ PICCOLO, RISPETTO AI VALORI ASSUNTI DALLA FUNZIONE IN UN INTORNO (MASSIMI O MINIMI RELATIVI) O RISPETTO AI VALORI ASSUNTI DALLA FUNZIONE IN TUTTO IL SUO DOMINIO (MASSIMI O MINIMI ASSOLUTI).

PER LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI LA RICERCA DEGLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI PUÒ ESSERE FATTA:

a) MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO, SE LA FUNZIONE È SEMPLICE, ATTRAVERSO LA SUA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA.

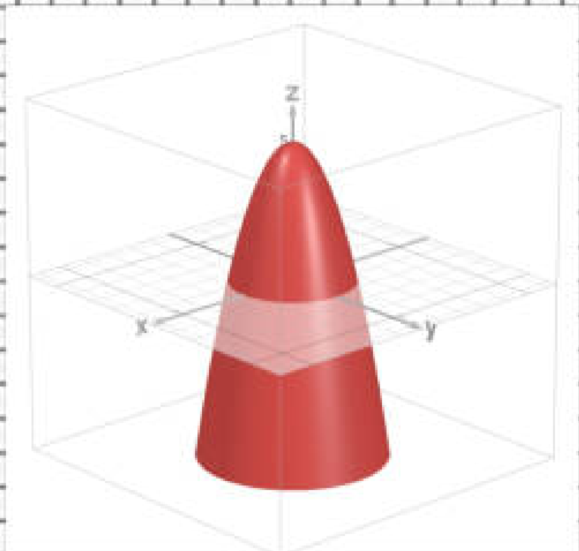
b) MEDIANTE LO STUDIO DELLE DERIVATE, CON PROCEDIMENTI ANALOGHI A QUELLI DELLE FUNZIONI IN UNA VARIABILE E PROCEDIMENTI SPECIFICI PER LE FUNZIONI IN DUE VARIABILI.

QUANDO LE VARIABILI POSSONO ASSUMERE QUALSIASI VALORE DEL DOMINIO, SENZA ALCUN VINCOLO, ALLORA SI PARLA DI MASSIMI O MINIMI LIBERI.

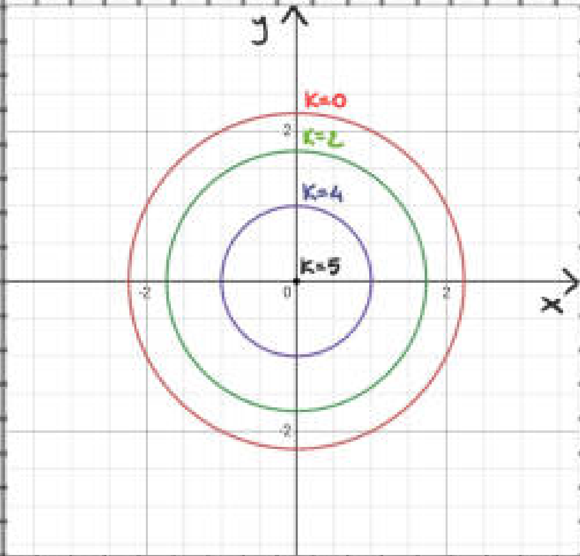
RICERCA MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO

ESAMINANDO LE LINEE DI LIVELLO SI POSSONO OTTENERE I MASSIMI E I MINIMI RELATIVI DI SEMPLICI FUNZIONI PERCHÉ IN PROSSIMITÀ DI UN MASSIMO O DI UN MINIMO LE LINEE DI LIVELLO

SI RESTRINGONO E TENDONO AD UN PUNTO, COME SI PUÒ VEDERE DAL GRAFICO SEGUENTE



$\Rightarrow$



RELATIVO ALLA FUNZIONE:

$$z=-x^2-y^2+5$$

LE CUI CURVE DI LIVELLO SONO DELLE CIRCONFERENZE CON CENTRO NELL'ORIGINE DEL PIANO DI BASE E RAPPRESENTATE DALL'EQUAZIONE:

$$-x^2-y^2+5=k \qquad \text{CON} \quad k=0,2,4,5$$

IN GENERALE DATA UNA FUNZIONE $z=f(x;y)$, BISOGNA INDIVIDUARE I PUNTI VERSO CUI TENDONO LE LINEE DI LIVELLO $f(x;y)=k$.

A SE PER VALORI CRESCENTI DI K LE LINEE DI LIVELLO SI RESTRINGONO TENDENDO AD UN PUNTO P, LA FUNZIONE HA UN PUNTO DI MASSIMO IN P.

B SE PER VALORI DECRESCENTI DI K LE LINEE DI LIVELLO SI RESTRINGONO TENDENDO AD UN PUNTO P, LA FUNZIONE HA UN PUNTO DI MINIMO IN P.

ESEMPI

1 DETERMINIAMO MASSIMI O MINIMI MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO DELLA FUNZIONE

$$z=-x^2-y^2+5$$

LE LINEE DI LIVELLO HANNO EQUAZIONE

$$-x^2-y^2+5=k \Rightarrow x^2+y^2-5+k=0$$

CIOÈ CIRCONFERENZE DI CENTRO $(0,0)$ E RAGGIO

$$r=\sqrt{0^2+0^2-(-5+k)}=\sqrt{5-k} \quad \text{CON } 5-k\geq 0 \Rightarrow k\leq 5$$

COSÌ

PER $k=0$ CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\sqrt{5}$

PER $k=2$ CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\sqrt{3}$

PER $k=4$ CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1

PER $k=5$ CIRCONFERENZA DI RAGGIO 0 CIOÈ UN PUNTO

QUINDI PER VALORI CRESCENTI DI k LE LINEE DI LIVELLO TENDONO AL PUNTO $P(0,0)$ CHE È IL CENTRO DELLE CIRCONFERENZE LINEE DI LIVELLO PERTANTO

$$\boxed{P(0;0) \text{ MASSIMO CON } z=5}$$

OSSERVAZIONE

TALE PUNTO È MASSIMO PER LA FUNZIONE IN TUTTO IL DOMINIO, PERTANTO È SIA UN MASSIMO RELATIVO CHE UN MASSIMO ASSOLUTO.

2 DETERMINIAMO MASSIMI O MINIMI MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO DELLA FUNZIONE

$$z=(2x-y)^2$$

LE LINEE DI LIVELLO HANNO EQUAZIONE

$$(2x-y)^2=k \quad \text{CON} \quad k\geq 0$$

COSÌ

PER $k=0$ RETTA DI EQUAZIONE $2x-y=0$

PER $k>0$ RETTE $2x-y=\pm\sqrt{k}$ PARALLELE A $2x-y=0$

QUINDI PER VALORI DECRESCENTI DI k TENDENTE A $\emptyset$ LE LINEE DI LIVELLO TENDONO A STRINGERSI ALLA RETTA $2x-y=0$, PERTANTO TUTTI I PUNTI DELLA RETTA CON $z=0$ SONO PUNTI DI MINIMO RELATIVO PER LA FUNZIONE.

3 DETERMINIAMO MASSIMI O MINIMI MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO DELLA FUNZIONE

$$z=4x-2y-x^2-y^2$$

LE LINEE DI LIVELLO HANNO EQUAZIONE

$$4x-2y-x^2-y^2=k$$

CIOÈ

$$x^2+y^2-4x+2y+k=0$$

CHE RAPPRESENTA CIRCONFERENZE DI CENTRO $C(-2;1)$ E RAGGIO $r=\sqrt{5-k}$ CON $k\leq 5$

COSÌ

PER $k=5$ LA CIRCONFERENZA HA RAGGIO $\emptyset$ ED È UN PUNTO

PER $k=4$ 〃 〃 〃 1

PER K=1 LA CIRCONFERENZA HA RAGGIO 2
PER K=-3 LA CIRCONFERENZA HA RAGGIO $\sqrt{8}$
QUINDI PER VALORI CRESCENTI DI K LE LINEE DI LIVELLO SI RESTRINGONO AL PUNTO (-2,1) CHE È IL CENTRO DELLE CIRCONFERENZE, DI CONSEGUENZA

$$\boxed{P(-2;1) \text{ MASSIMO CON } z=5}$$

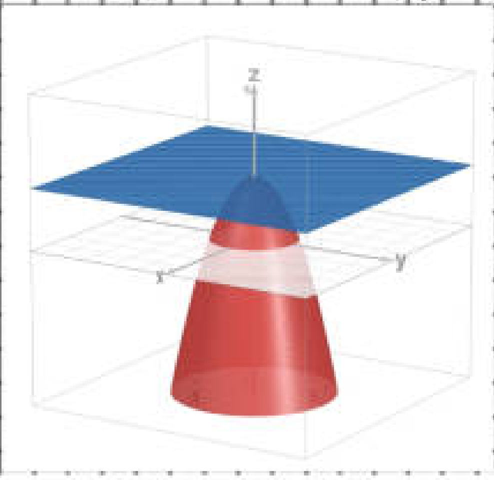
RICERCA MEDIANTE LE DERIVATE PARZIALI

LA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ ESISTANO EVENTUALI PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVI, ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE, È CHE LA FUNZIONE AMMETTA DERIVATE PARZIALI PRIME CONTINUE E CHE ENTRAMBE SI ANNULLINO, CIOÈ IN GENERALE SE

$$f'_x(x_0;y_0)=0 \quad \text{E} \quad f'_y(x_0;y_0)=0$$

ALLORA IL PUNTO $P_0(x_0;y_0)$ È DETTO PUNTO CRITICO O STAZIONARIO.

QUESTO PERCHÉ GEOMETRICAMENTE IL PIANO TANGENTE AD UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO È PARALLELO AL PIANO DI BASE XY, E SI HA $f'_x(P_0)=f'_y(P_0)=0$, CIOÈ AD ESEMPIO:



NATURALMENTE COME PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE NON TUTTI I PUNTI CHE ANNULLANO LE DERIVATE PRIME PARZIALI SONO MASSIMI O MINIMI.
QUINDI PER DETERMINARE I PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVO SI PROCEDE NEL MODO SEGUENTE:

1 SI RISOLVE IL SISTEMA

$$\begin{cases} f'_x(x;y)=0 \\ f'_y(x;y)=0 \end{cases}$$

E LE SOLUZIONI DI QUESTO SISTEMA RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEI PUNTI STAZIONARI O CRITICI.

2 TRA TALI PUNTI SI RICERCANO GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI MEDIANTE IL DETERMINANTE (DETTO HESSIANO) DELLA MATRICE DELLE DERIVATE PARZIALI SECONDE:

$$H=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}\cdot f''_{yy} - f''_{xy}\cdot f''_{yx} = f''_{xx}\cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$$

IL QUALE CI DICE CHE SE $P_0(x_0;y_0)$ È UN PUNTO STAZIONARIO ALLORA:

a- SE $H(x_0;y_0)>0$ ED $f''_{xx}(x_0;y_0)>0$
ALLORA P_0 MINIMO RELATIVO

b- SE $H(x_0;y_0)>0$ ED $f''_{xx}(x_0;y_0)<0$
ALLORA P_0 MASSIMO RELATIVO

c – SE $H(x_0;y_0)<0$

P_0 È PUNTO DI SELLA

(ANALOGO DEL FLESSO PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE)

d – SE $H(x_0;y_0)=0$

NON SI PUÒ STABILIRE A PRIORI DI CHE PUNTO SI TRATTA MA BISOGNA ESAMINARE DIRETTAMENTE LA FUNZIONE IN UN INTORNO DI P_0 O MEDIANTE LE LINEE DI LIVELLO.

ESEMPI

1 DETERMINARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE:

$$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y$$

DETERMINIAMO LE DERIVATE PARZIALI PRIME, CIOÈ

$$z'_x=2x-y+3 \qquad z'_y=-x+4y+2$$

DETERMINIAMO GLI EVENTUALI PUNTI CRITICI, CIOÈ

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\-x+4y+2=0\end{cases}$$

SISTEMA LINEARE CHE POSSIAMO RISOLVERE PER SOSTITUZIONE

$$\begin{cases}y=2x+3\\-x+4(2x+3)+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=2x+3\\-x+8x+12+2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ 7x=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow P(-2;-1) \text{ PUNTO CRITICO}$$

DETERMINIAMO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE:

$$z''_{xx}=2 \quad z''_{xy}=-1 \quad \text{E} \quad z''_{yx}=-1 \quad z''_{yy}=4$$

DETERMINIAMO L'HESSIANO

$$H=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-\left(f''_{xy}\right)^2=(2)(4)-(-1)^2=8-1=7>0$$

ED ESSENDO $f''_{xx}(-2;-1)=2>0$ ALLORA

$$\boxed{P(-2;-1) \text{ MINIMO RELATIVO}}$$

CON $z=(-2)^2-(-2)(-1)+2(-1)^2+3(-2)+2(-1)=-4$

2 DETERMINARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$z=y-x^2-4x$$

$$z'_x=-2x-4 \qquad z'_y=1$$

$$\begin{cases} -2x-4=0 \\ 1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

QUINDI $\boxed{\text{NESSUN PUNTO CRITICO}}$

3 DETERMINARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$z=x^3-3x^2y+y^2+4y$$

$$z'_x = 3x^2 - 6xy \qquad z'_y = -3x^2 + 2y + 4$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6xy = 0 \\ -3x^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(x - 2y) = 0 \\ -3x^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ -3x^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2y \\ -3(2y)^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2y \\ -12y^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$P_1(0; -2) \cup \begin{cases} x = 2y \\ 6y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \begin{cases} \dfrac{1-7}{12} = -\dfrac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,2}} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x_1 = -1 \\[2ex] \dfrac{1+7}{12} = \dfrac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{12}_{\,3}} = \dfrac{2}{3} \rightarrow x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

QUINDI I PUNTI CRITICI SONO

$$P_1(0; -2) \quad P_2\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{E} \quad P_3\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

$$z''_{xx} = 6x - 6y \qquad z''_{yy} = 2$$

$$z''_{xy} = -6x \qquad z''_{yx} = -6x$$

$$H = (6x - 6y)(2) - (-6x)^2 = 2(6x - 6y) - 36x^2$$

$$H(0;-2)=2[6\cdot 0-6\cdot(-2)]-36(0)^2=24>0$$

$$f''_{xx}(0;-2)=6\cdot 0-6\cdot(-2)=12>0$$

$$\boxed{P_1(0;-2)\ \text{MINIMO RELATIVO}}$$

$$H\left(-1;-\frac{1}{2}\right)=2\left[6\cdot(-1)-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]-36(-1)^2=-42<0$$

$$\boxed{P_2\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\ \text{PUNTO DI SELLA}}$$

$$H\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)=2\left[6\left(\frac{4}{3}\right)-6\left(\frac{2}{3}\right)\right]-36\left(\frac{4}{3}\right)^2=8-54=-46<0$$

$$\boxed{P_3\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)\ \text{PUNTO DI SELLA}}$$

4 DETERMINARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$z=x^4-3x^2y+2y^2$$

$$z'_x=4x^3-6xy \qquad z'_y=-3x^2+4y$$

$$\begin{cases}4x^3-6xy=0\\-3x^2+4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x(2x^2-3y)=0\\-3x^2+4y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=0\\-3x^2+4y=0\end{cases}\cup\begin{cases}2x^2-3y=0\\-3x^2+4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\cup\begin{cases}y=\frac{2}{3}x^2\\-3x^2+\frac{8}{3}x^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\cup\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}\Rightarrow P(0;0)\ \text{PUNTO CRITICO}$$

$z''_{xx} = 12x^2 - 6y$ $\qquad$ $z''_{yy} = 4$

$z''_{xy} = -6x$ $\qquad$ $z''_{yx} = -6x$

$H = 4 \cdot (12x^2 - 6y) - (-6x)^2 = 48x^2 - 24xy - 36x^2$

$H(0;0) = 0 \longrightarrow$ NON SI PUÒ STABILIRE

PROVIAMO QUINDI A VERIFICARE IN UN INTORNO DEL PUNTO $(0;0)$ COME SI COMPORTA LA FUNZIONE, STUDIANDONE IL SEGNO.

PER FARE QUESTO DOBBIAMO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

$$x^4 - 3x^2y + 2y^2 > 0$$

A TAL PROPOSITO RISCRIVIAMO LA FUNZIONE IN MODO DIVERSO SCOMPONENDO E RACCOGLIENDO, CIOÈ:

$$x^4 - 3x^2y + 2y^2 = x^4 - 2x^2y - x^2y + 2y^2 =$$

$$= x^2(x^2 - 2y) - y(x^2 - 2y)$$

COSÌ

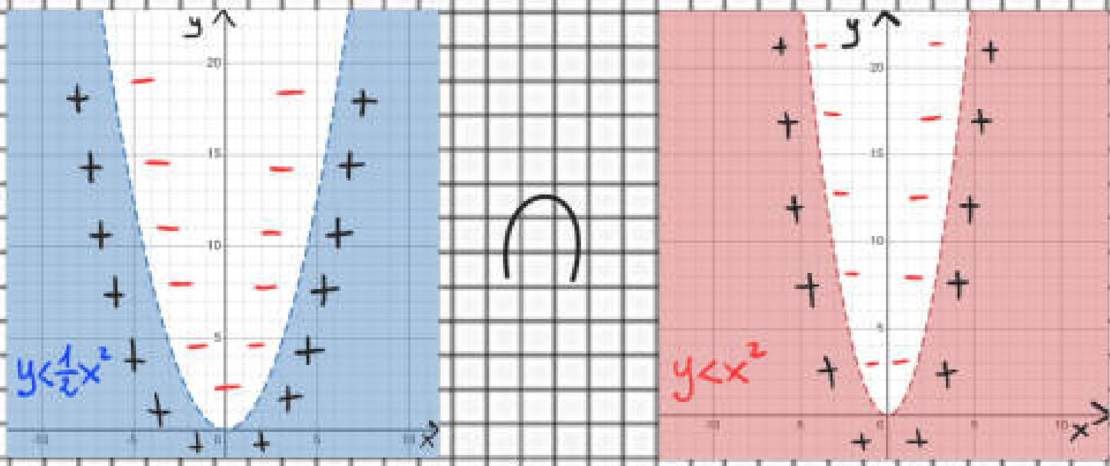
$$(x^2 - 2y)(x^2 - y) > 0$$

E STUDIANDO IL SEGNO DEI DUE FATTORI SINGOLARMENTE, CIOÈ INTERSECANDO LE SOLUZIONI DELLE DUE DISEQUAZIONI IN DUE VARIABILI

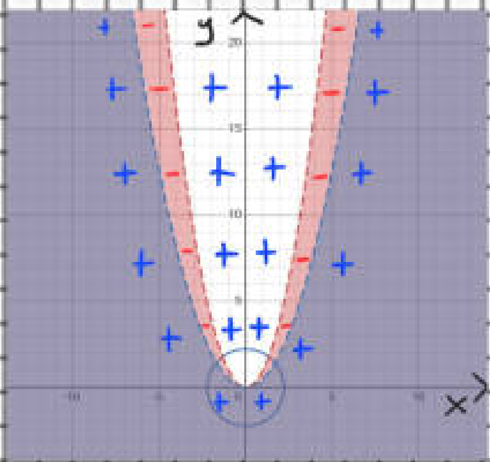
$$x^2 - 2y > 0 \quad \cap \quad x^2 - y > 0$$

$$y < \frac{1}{2}x^2 \quad \cap \quad y < x^2$$

CHE GRAFICAMENTE FORNISCONO LE SOLUZIONI



LA CUI INTERSEZIONE È



E COME SI PUÒ VEDERE IN UN INTORNO QUALSIASI DEL PUNTO (0;0) LA FUNZIONE È SIA POSITIVA (STA SOPRA IL PIANO DELL'ORIGINE) CHE NEGATIVA (STA SOTTO IL PIANO DELL'ORIGINE), QUINDI IL PUNTO (0;0) ORIGINE NON PUÒ ESSERE NÈ UN MASSIMO E NÈ UN MINIMO.

5 DETERMINARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$z = x^2 - 2xy + y^2 + 1$$

$$z'_x = 2x - 2y \qquad z'_y = -2x + 2y$$

$$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 0=0 \end{cases}$$

INDETERMINATO CIOÈ TUTTI I PUNTI DELLA RETTA $y=x$

$z''_{xx}=2$ $\qquad$ $z''_{yy}=2$

$z''_{xy}=-2$ $\qquad$ $z''_{yx}=-2$

$H=2\cdot 2-(-2)^2=4-4=0$ NULLA SI PUÒ DIRE

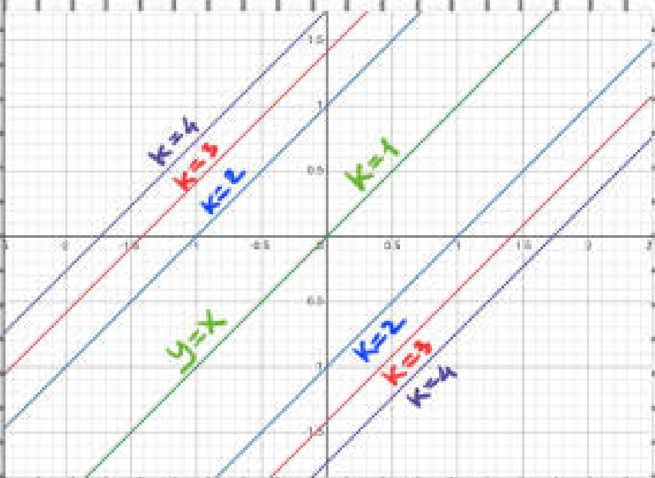
STUDIANDO GRAFICAMENTE LE LINEE DI LIVELLO SI PUÒ VEDERE CHE PARTENDO DAL VALORE DI $K=4$ DECREMENTANDOLO DI 1 OTTENIAMO RETTE SEMPRE PARALLELE CHE TENDONO A "STRINGERSI" NELL'UNICA RETTA $y=x$ NEL VALORE DI $K=1$, CIOÈ

$K=4 \quad x^2-2xy-y^2-1=4$

$K=3 \quad x^2-2xy-y-1=3$

$K=2 \quad x^2-2xy-y-1=2$

$K=1 \quad x^2-2xy-y-1=1$



QUINDI PER K DECRESCENTE SIGNIFICA CHE TUTTI I PUNTI DELLA RETTA $y=x$ SONO PUNTI DI MINIMO RELATIVO

6 DETERMINARE GLI EVENTUALI MASSIMI O MINIMI RELATIVI DELLA FUNZIONE

$$z=x^2y^2-x^2-y^2$$

Funzioni in 2 variabili: massimi e minimi relativi liberi (ESEMPI)

$$z'_x = 2xy^2 - 2x \qquad z'_y = 2x^2y - 2y$$

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(y^2 - 1) = 0 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2 = 1 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ 2x^2y - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -1 \\ -2x^2 + 2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = +1 \\ 2x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = +1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1(0,0) \; P_2(-1;-1) \; P_3(+1;-1) \; P_4(-1;+1) \; P_5(+1;+1)$$

$$z''_{xx} = 2y^2 - 2 \qquad z''_{yy} = 2x^2 - 2$$

$$z''_{xy} = 4xy \qquad z''_{yx} = 4xy$$

$$H = (2y^2 - 2)(2x^2 - 2) - 16x^2y^2$$

$H(0,0) = 4 > 0 \quad z''_{xx}(0,0) = -2 \Rightarrow (0;0)$ MAX

$H(-1;-1) = -16 < 0 \Rightarrow (-1;-1)$ PUNTO DI SELLA

$H(+1;-1) = -16 < 0 \Rightarrow (+1;-1)$ PUNTO DI SELLA

$H(-1;+1) = -16 < 0 \Rightarrow (-1;+1)$ PUNTO DI SELLA

$H(+1;+1) = -16 < 0 \Rightarrow (+1;+1)$ PUNTO DI SELLA