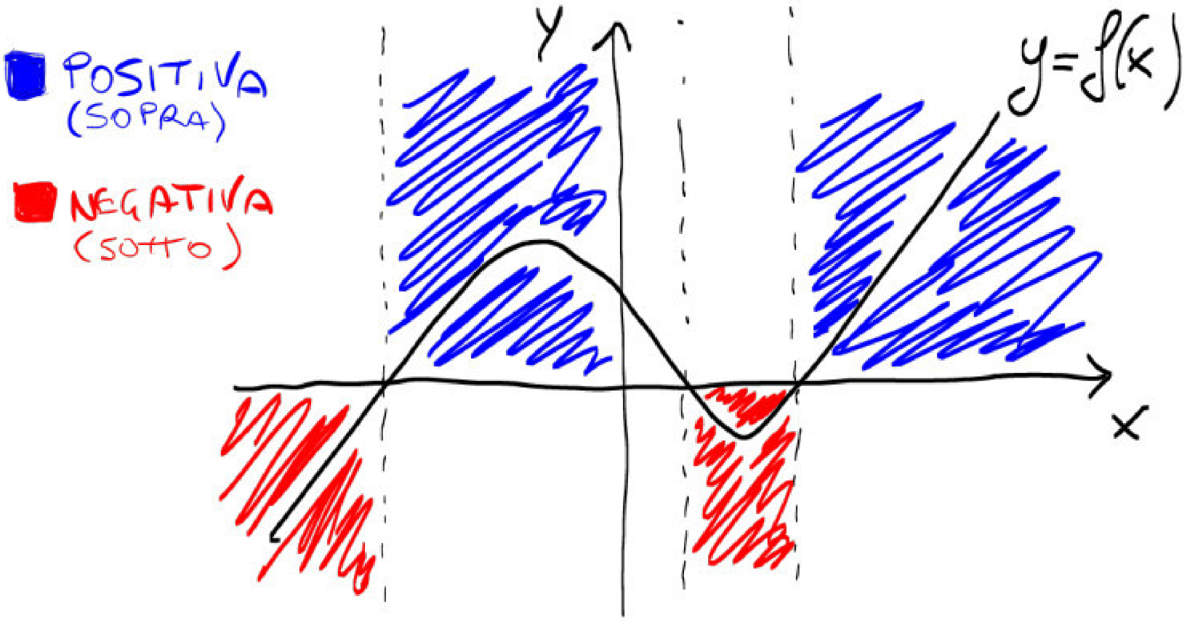
SEGNO INTERSEZIONI SIMMETRIE PERIODICITA

LO STUDIO DEL SEGNO DI UNA FUNZIONE INDIVIDUA LE REGIONI DEL PIANO CARTESIANO ALL'INTERNO DEL DOMINIO, IN CUI LA FUNZIONE È POSITIVA (CIOÈ STA SOPRA L'ASSE DELLE X) OPPURE È NEGATIVA (STA SOTTO L'ASSE DELLE X):



COME SI CERCA:

SI PONE LA FUNZIONE MAGGIORE DI ∅ E SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE

$$f(x) > 0$$

ELIMINANDO NATURALMENTE LE REGIONI DI PIANO DOVE LA FUNZIONE NON ESISTE (FUORI DAL DOMINIO).

ESEMPIO 1

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$y = \frac{x}{x^2-4}$$

CONDIZIONI DI ESISTENZA

$x^2-4 \neq 0 \quad x \neq \pm 2$

PONIAMOLA MAGGIORE DI Ø

$$\frac{x}{x^2-4} > 0 \qquad \left(\frac{N}{D} > 0\right)$$

ED OTTENIAMO UNA DISEQUAZIONE FRATTA, QUINDI

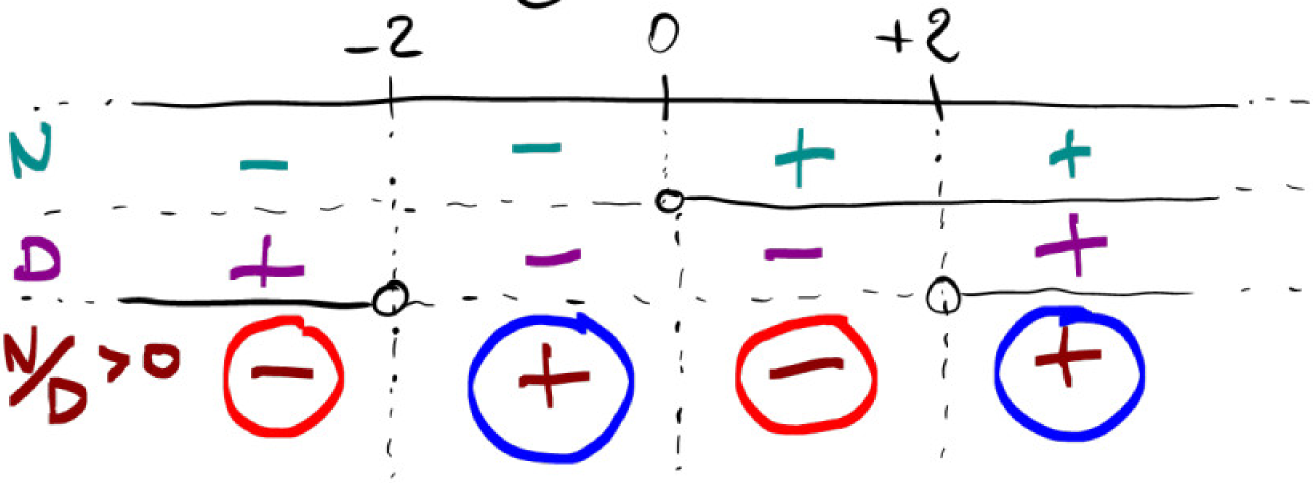
$$\begin{cases} x > 0 & \text{NUMERATORE} \\ x^2-4 > 0 & \text{DENOMINATORE} \end{cases}$$

$$x^2-4>0 \qquad x^2-4=0 \qquad x_{1,2}=\begin{cases}-2\\+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x<-2 \cup x>2$$

CIOÈ

$$\begin{array}{l} N: \\ D: \end{array}\begin{cases} x>0 \\ x<-2 \cup x>2 \end{cases}$$



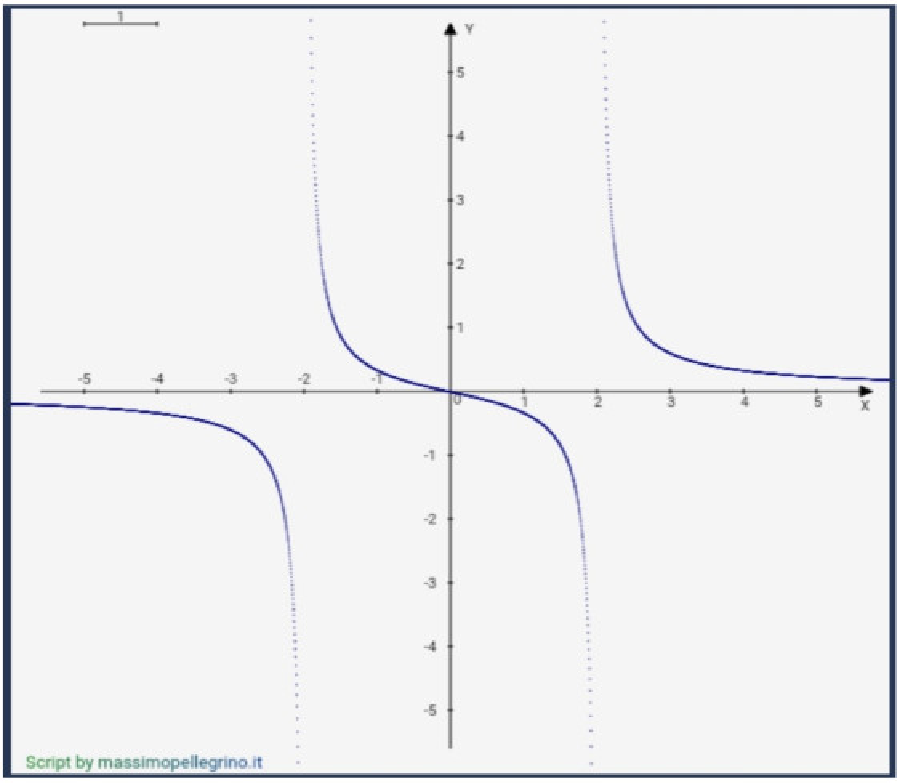
QUINDI LA FUNZIONE È **POSITIVA** (CIOÈ STA SOPRA L'ASSE DELLE X) SE:

$$\boxed{-2<x<0 \quad \cup \quad x>+2}$$

MENTRE È **NEGATIVA** (CIOÈ STA SOTTO L'ASSE X) SE:

$$\boxed{x<-2 \cup 0<x<+2}$$

COME POSSIAMO VEDERE DAL GRAFICO:



ESEMPIO 2

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE:

$$y = \frac{x-10}{2x^2-32}$$

CONDIZIONI DI ESISTENZA

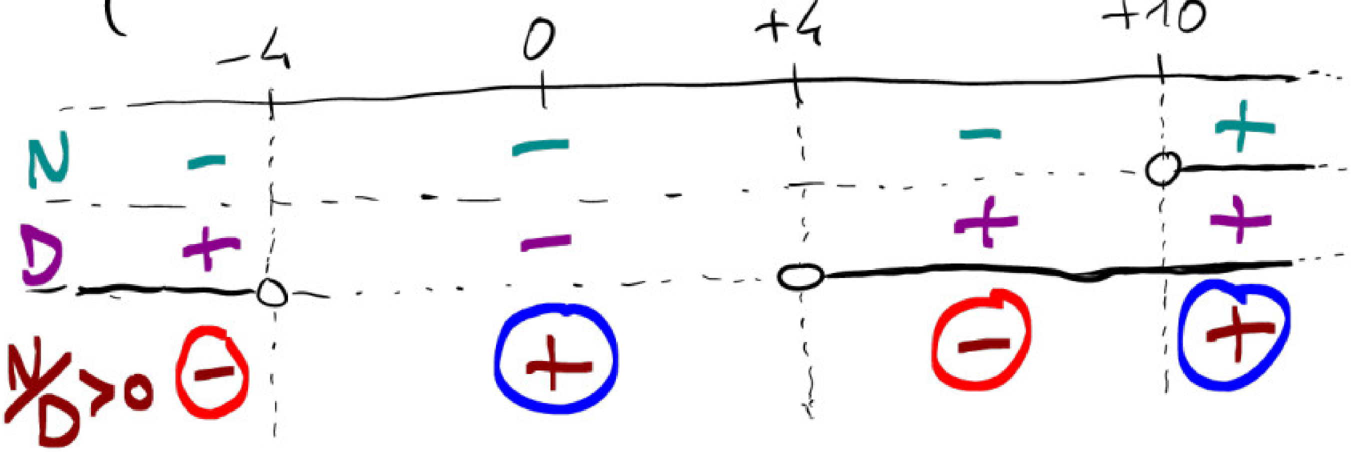
$2x^2 - 32 \neq 0 \quad x \neq \pm 4$

PONIAMO LA FUNZIONE MAGGIORE DI Ø

$$\frac{x-10}{2x^2-32} > 0 \qquad \left(\frac{N}{D} > 0\right)$$

QUINDI

$$\begin{cases} x-10>0 \\ 2x^2-32>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N: x>10 \\ D: x<-4 \cup x>+4 \end{cases}$$



QUINDI LA FUNZIONE È **POSITIVA**

SE: $\boxed{-4<x<+4 \cup x>+10}$

MENTRE È **NEGATIVA** SE:

$\boxed{x<-4 \cup +4<x<+10}$

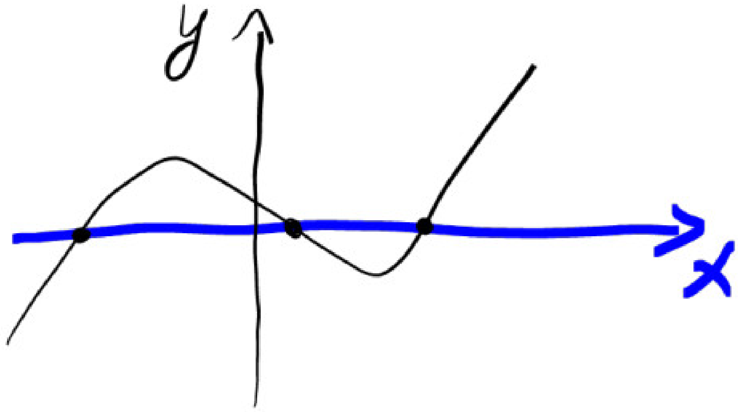
INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI

LE INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI SONO I PUNTI IN CUI LA FUNZIONE TOCCA L'ASSE DELLE X (ASCISSE) DETTI ANCHE "ZERI DELLA FUNZIONE" PERCHÉ IN ESSI L'ORDINATA y VALE Ø, E I PUNTI IN CUI TOCCA L'ASSE y (ORDINATE).

INTERSEZIONE CON L'ASSE X (ZERI DELLA FUNZIONE)

PER TROVARE QUESTI PUNTI SI PONE LA FUNZIONE UGUALE A Ø, SI RISOLVE L'EQUAZIONE E LE SOLUZIONI SARANNO GLI "ZERI DELLA FUNZIONE"

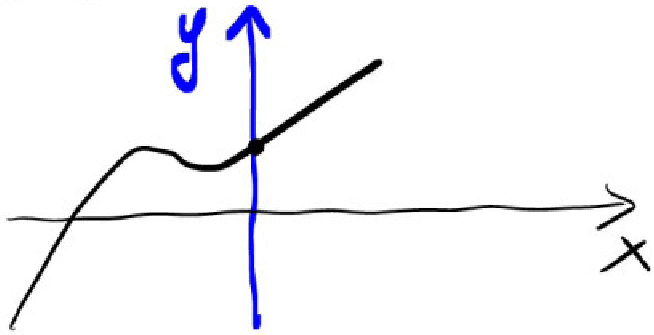
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$$



INTERSEZIONE CON L'ASSE Y (SE IL DOMINIO LO PERMETTE)

PER TROVARE QUESTI PUNTI SI SOSTITUISCE Ø ALLA X, SI SVOLGONO I CALCOLI E SI DETERMINA IL VALORE DELLA y.
QUESTA INTERSEZIONE SE ESISTE É UNICA.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = f(0)$$



ESEMPIO 1

$$y = \frac{x}{x^2-4}$$

INTERSEZIONE ASSE X

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{x^2-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

INTERSEZIONE ASSE Y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{0}{0-4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=0}$$

ESEMPIO 2

$$y = \frac{x-10}{2x^2-32}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x-10}{2x^2-32} = 0 \end{cases} \Rightarrow x-10=0 \quad \boxed{x=10}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{0-10}{2 \cdot 0-32} = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{32}_{16}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{16}}$$

SIMMETRIE DI UNA FUNZIONE

CERCARE EVENTUALI SIMMETRIE DI UNA FUNZIONE PERMETTE DI SEMPLIFICARE LA REALIZZAZIONE DEL SUO GRAFICO.

SIMMETRIA PARI (RISPETTO ALL'ASSE Y)

UNA FUNZIONE SI DICE PARI SE È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE DELLE Y.

DATA LA FUNZIONE

$$y = f(x)$$

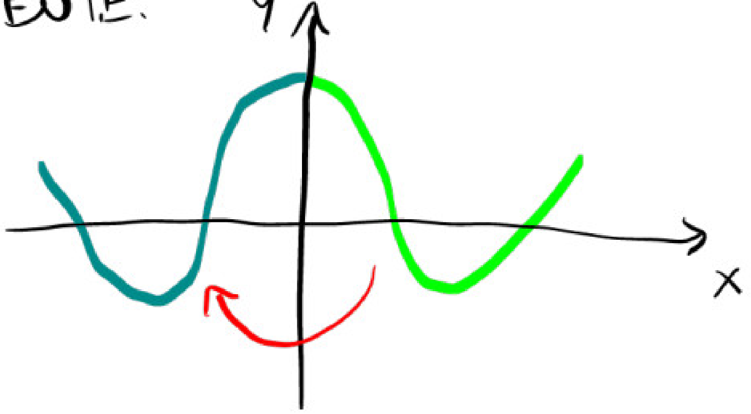
ESSA È PARI SE

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

CONDIZIONE DI PARITÀ

QUINDI PER DETERMINARE SE UNA FUNZIONE È PARI SI SOSTITUISCE $-x$ AL POSTO DI x E SI SVILUPPANO I CALCOLI PER VEDERE SE LA CONDIZIONE VERIFICATA.

GRAFICAMENTE:



IN QUESTO CASO LA FUNZIONE SI PUÒ STUDIARE ANALITICAMENTE SOLO NEL SEMIPIANO POSITIVO DELLE ASCISSE E RIBALTARE IL GRAFICO OTTENUTO NEL SEMIPIANO NEGATIVO DELLE ASCISSE.

SIMMETRIA DISPARI (RISPETTO ALL'ORIGINE)

UNA FUNZIONE SI DICE DISPARI SE È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ORIGINE DEGLI ASSI.

DATA LA FUNZIONE

$$y = f(x)$$

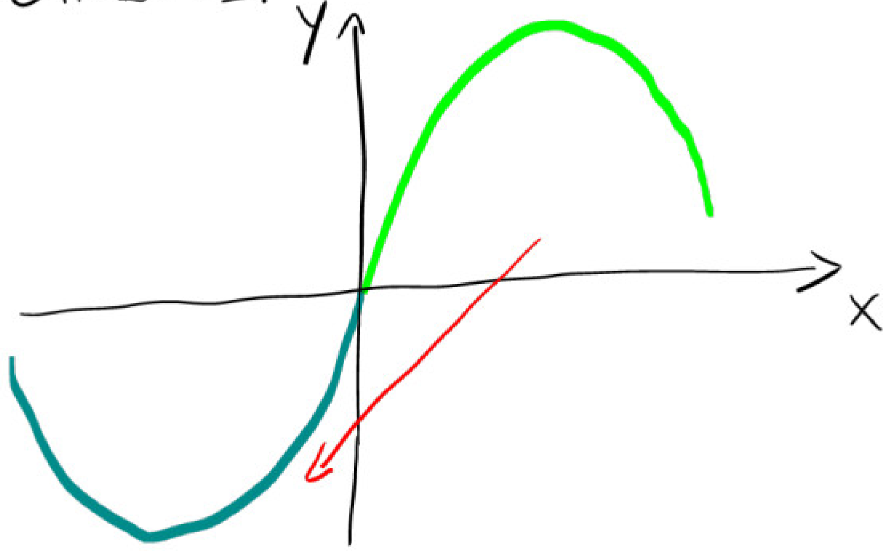
ESSA È DISPARI SE

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

CONDIZIONE DI DISPARITÀ

QUINDI PER DETERMINARE SE UNA FUNZIONE È DISPARI SI SOSTITUISCE $-x$ AL POSTO DI x E SI SVILUPPANO I CALCOLI PER VEDERE SE LA CONDIZIONE È VERIFICATA.

GRAFICAMENTE:



IN QUESTO CASO LA FUNZIONE SI PUÒ STUDIARE ANALITICAMENTE SOLO NEL SEMIPIANO POSITIVO DELLE ASCISSE E RIBALTARE IL GRAFICO OTTENUTO, RISPETTO ALL'ORIGINE.

ESEMPIO 1

$y = x^2$ FUNZIONE PARI

PERCHÉ

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$ CIOÈ $\boxed{f(-x) = f(x)}$

ESEMPIO 2

$y = x^3$ FUNZIONE DISPARI

PERCHÉ

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ CIOÈ $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

ESEMPIO 3

$y = \frac{x}{x^2-4}$

CONDIZIONI DI ESISTENZA

$x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4}$

CIOÈ $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

QUINDI LA FUNZIONE È DISPARI.

OSSERVAZIONE:

UNA FUNZIONE PUÒ RISULTARE CHE SIA NÉ PARI E NÉ DISPARI

ESEMPIO DI FUNZIONE NÉ PARI E NÉ DISPARI

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE:

$$y = f(x) = \frac{x-2}{x^2-2}$$

CONDIZIONI DI ESISTENZA

$x^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

VERIFICHIAMO CHE:

$$f(-x) = \frac{-x-2}{(-x)^2-2} = \frac{-x-2}{x^2-2}$$

MA

$$\boxed{f(-x) \neq f(x)}$$

$$\frac{-x-2}{x^2-2} \neq \frac{x-2}{x^2-2}$$ LA FUNZIONE NON È PARI

E

$$\boxed{f(-x) \neq -f(x)}$$

$$\frac{-x-2}{x^2-2} \neq -\frac{x-2}{x^2-2}$$

$$\frac{-x-2}{x^2-2} \neq \frac{-x+2}{x^2-2}$$ LA FUNZIONE NON È DISPARI

PERIODICITÀ DI UNA FUNZIONE

SI DICONO FUNZIONI PERIODICHE QUELLE FUNZIONI CHE RIPETONO LA LORO FORMA AD INTERVALLI REGOLARI.
LA DIMENSIONE DELL'INTERVALLO SI DICE APPUNTO PERIODO E SI INDICA CON

$$T$$

SE UNA FUNZIONE È PERIODICA PER DETERMINARE IL SUO PERIODO SI PONE

$$\boxed{f(x+T)=f(x)}$$

SI OTTIENE UNA EQUAZIONE CHE POSSIAMO RISOLVERE PROPRIO NELLA INCOGNITA T CHE SARÀ IL PERIODO DELLA FUNZIONE.

SEGNO INTERSEZIONI SIMMETRIE PERIODICITA

ESEMPIO 1

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\operatorname{sen}(x+T) = \operatorname{sen} x$$

VERA SE E SOLO SE

$$x + T = x + 2k\pi$$

CIOÈ

$$T = \cancel{x} - \cancel{x} + 2k\pi$$

PER $k=1$ $\boxed{T = 2\pi}$

CHE È L'INTERVALLO CON CUI IL SENO RIPETE LA SUA FORMA NEL PIANO CARTESIANO.

ESEMPIO 2

$$f(x) = \cos(3x)$$

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\cos[3(x+T)] = \cos 3x$$

CIOÈ

$$3(x+T) = 3x + 2k\pi$$

$$\cancel{3x} + 3T = \cancel{3x} + 2k\pi$$

$$3T = 2k\pi$$

$$T = \frac{2}{3}k\pi$$

PER $k=1$

$$\boxed{T = \frac{2}{3}\pi}$$

ESEMPI

1) $y = x^2 + 3$ DOMINIO: $\mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$$

LA FUNZIONE È PARI

2) $y = \frac{1}{x}$

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

LA FUNZIONE È DISPARI

3) $y = -2x^3 + x$

$$f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) = +2x^3 - x = -(-2x^3 + x) = -f(x)$$

LA FUNZIONE È DISPARI