FUNZIONE LOGARITMO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LOGARITMICA

SI DEFINISCE FUNZIONE LOGARITMICA, LA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE CON EQUAZIONE

$$y = \log_a x$$

DOVE "a" È DETTA BASE DEL LOGARITMO ED È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (>0) E DIVERSO DA UNO ($a \neq 1$)
MENTRE "X" CHE È LA VARIABILE DELLA FUNZIONE È DETTA ARGOMENTO DEL LOGARITMO ED È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (>0), DA QUI NE DERIVA CHE IL SUO DOMINIO È L'INSIEME $\mathbb{R}^+$ (NUMERI REALI STRETTAMENTE POSITIVI).

LA SUA PROPRIETÀ FONDAMENTALE È CHE SE LA BASE DEL LOGARITMO È MAGGIORE DI 1, CIOÈ SE $a>1$, ALLORA LA FUNZIONE È CRESCENTE, MENTRE SE LA BASE DEL LOGARITMO È COMPRESA TRA 0 ED 1, CIOÈ $0<a<1$ ALLORA LA FUNZIONE È DECRESCENTE.

QUINDI LA FUNZIONE LOGARITMICA È BIUNIVOCA (AD OGNI X ASSOCIA UNA ED UNA SOLA Y E VICEVERSA) E MONOTONA (SEMPRE CRESCENTE O DECRESCENTE)

CODOMINIO

IN OGNI CASO IL VALORE DI Y RESTITUITO DALLA FUNZIONE È SEMPRE UN NUMERO REALE QUALSIASI E DI CONSEGUENZA IL SUO CODOMINIO È TUTTO L'INSIEME $\mathbb{R}$ (NUMERI REALI).

FUNZIONE LOGARITMO

LA CURVA LOGARITMICA

PER VALUTARE L'ANDAMENTO NEL PIANO CARTESIANO DELLA FUNZIONE LOGARITMICA DISTINGUIAMO I 2 DIVERSI CASI IN CUI $a>1$ ED $0<a<1$, CON DUE SEMPLICI ESEMPI:

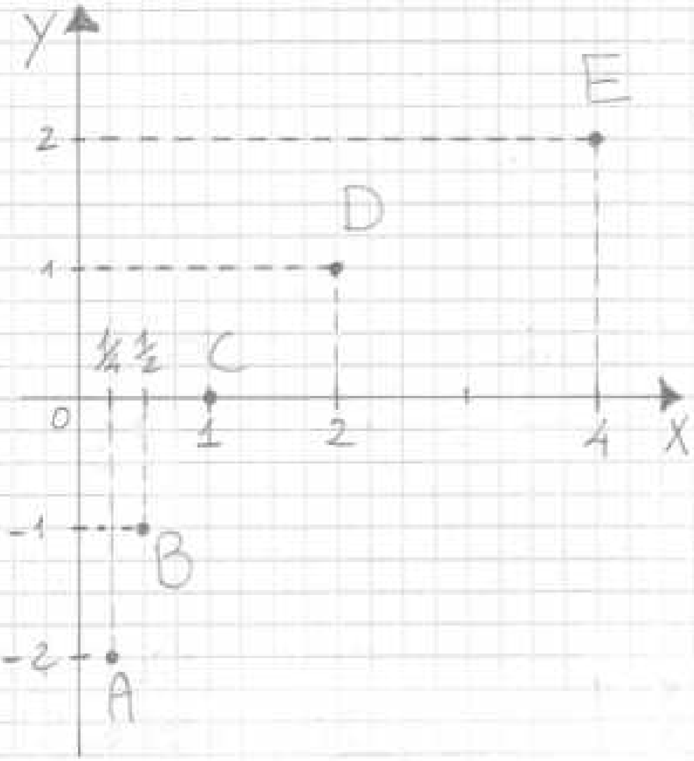
I° CASO - $a>1$

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA FUNZIONE:

$$y = \log_2 x \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

DETERMINIAMO QUALCHE SUO PUNTO E RAPPRESENTIAMOLI NEL PIANO CARTESIANO:

	X	f(X)	Y
A	$\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4}$	-2
B	$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2}$	-1
C	1	$\log_2 1$	0
D	2	$\log_2 2$	1
E	4	$\log_2 4$	2



DA QUESTO SI EVINCE SIA ANALITICAMENTE CHE GRAFICAMENTE CHE LA Y CRESCE AL CRESCERE DELLA X, CIOÈ LA FUNZIONE È CRESCENTE.

FUNZIONE LOGARITMO

VEDIAMO CHE VALORI ASSUME LA Y QUANDO LA "X" SI AVVICINA, PER VALORI POSITIVI, ALLO ZERO (LIMITE INFERIORE DEL DOMINIO):

DALLA FUNZIONE $y = \log_2 x$

PER LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO POSSIAMO SCRIVERE

$$2^y = x$$

LA X TENDE A 0^+, A ZERO DA DESTRA (PER VALORI POSITIVI), E QUINDI POSSIAMO SCRIVERE ANCHE:

$$x = 0^+ = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 2^{-\infty}$$

DI CONSEGUENZA

$$2^y = 2^{-\infty}$$

CIOÈ

$$\boxed{y = -\infty}$$

TUTTO QUESTO SI SCRIVE CON LA NOTAZIONE DI LIMITE:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \left(\log_2 x \right) = -\infty}$$

MENTRE SE LA "X" CRESCE IN MANIERA INFINITA

$$2^y = +\infty = 2^{+\infty}$$

CIOÈ

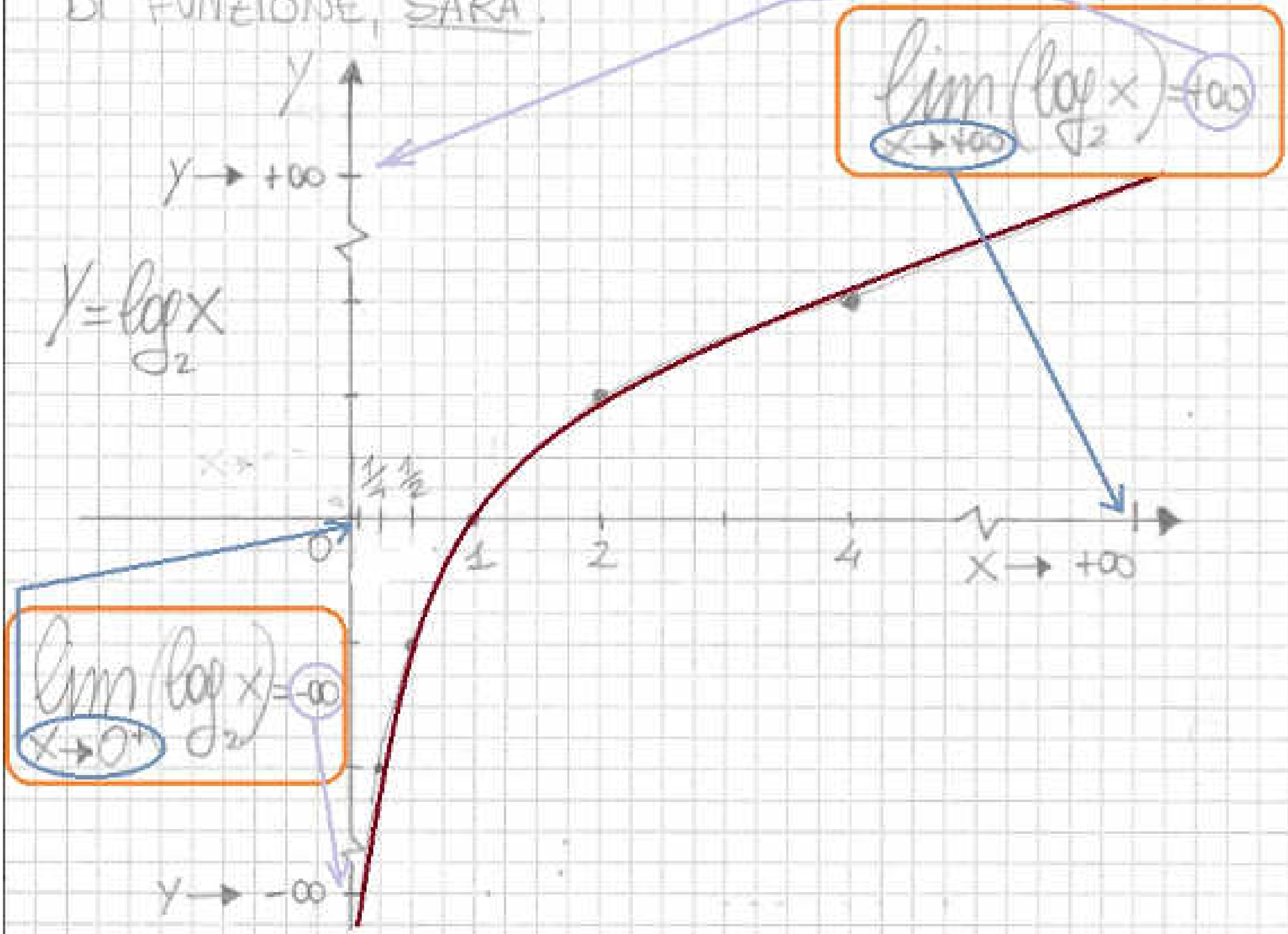
$$\boxed{y = +\infty}$$

PERCHÉ

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\log_2 x \right) = +\infty}$$

FUNZIONE LOGARITMO

QUINDI LA CURVA LOGARITMICA DEL NOSTRO ESEMPIO DI FUNZIONE, SARÀ:



II° CASO - $0<a<1$

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA FUNZIONE:

$$Y = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

	A	B	C	D	E
X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
f(x)	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} 1$	$\log_{\frac{1}{2}} 2$	$\log_{\frac{1}{2}} 4$
Y	2	1	0	-1	-2

SI EVINCE CHE LA Y DECRESCE AL CRESCERE DELLA X (FUNZIONE DECRESCENTE)

POI DALLA FUNZIONE

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

SAPPIAMO CHE

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$$

CIOÈ

$$\frac{1}{2^y} = x \Rightarrow 2^{-y} = x$$

MA SE

$$\boxed{x = 0^+} = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 2^{-\infty}$$

ALLORA

$$2^{-y} = 2^{-\infty}$$

$$-y = -\infty \Rightarrow \boxed{y = +\infty}$$

IL CHE VALE A DIRE

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = +\infty}$$

MENTRE

$$\boxed{x = +\infty} = 2^{+\infty}$$

ED

$$2^{-y} = 2^{+\infty}$$

ALLORA

$$-y = +\infty \Rightarrow \boxed{y = -\infty}$$

IL CHE EQUIVALE A DIRE

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = -\infty}$$

FUNZIONE LOGARITMO