

FUNZIONE LOGARITMO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LOGARITMICA

SI DEFINISCE FUNZIONE LOGARITMICA LA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE CON EQUAZIONE

$$y = \log_a x$$

DOVE " a " È DETTA BASE DEL LOGARITMO ED È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (> 0) E DIVERSO DA UNO ($a \neq 1$)

MENTRE " x " CHE È LA VARIABILE DELLA FUNZIONE È DETTA ARGOMENTO DEL LOGARITMO ED È UN NUMERO REALE STRETTAMENTE POSITIVO (> 0). DA QUI NE DERIVA CHE IL SUO DOMINIO È L'INSIEME \mathbb{R}^+ (NUMERI REALI STRETTAMENTE POSITIVI)

LA SUA PROPRIETÀ FONDAMENTALE È CHE SE LA BASE DEL LOGARITMO È MAGGIORE DI 1, CIOÈ SE $a > 1$, ALLORA LA FUNZIONE È CRESCENTE, MENTRE SE LA BASE DEL LOGARITMO È COMPRESA TRA 0 ED 1, CIOÈ $0 < a < 1$ ALLORA LA FUNZIONE È DECRESCENTE.

QUINDI LA FUNZIONE LOGARITMICA È BIUNIVOCA (AD OGNI x ASSOCIA UNA ED UNA SOLA y E VICEVERSA) E MONOTONA (SEMPRE CRESCENTE O DECRESCENTE)

CODOMINIO

IN OGNI CASO IL VALORE DI y RESTITUITO DALLA FUNZIONE È SEMPRE UN NUMERO REALE QUALSIASI E DI CONSEGUENZA IL SUO CODOMINIO È TUTTO L'INSIEME \mathbb{R} (NUMERI REALI).

FUNZIONE LOGARITMO

LA CURVA LOGARITMICA

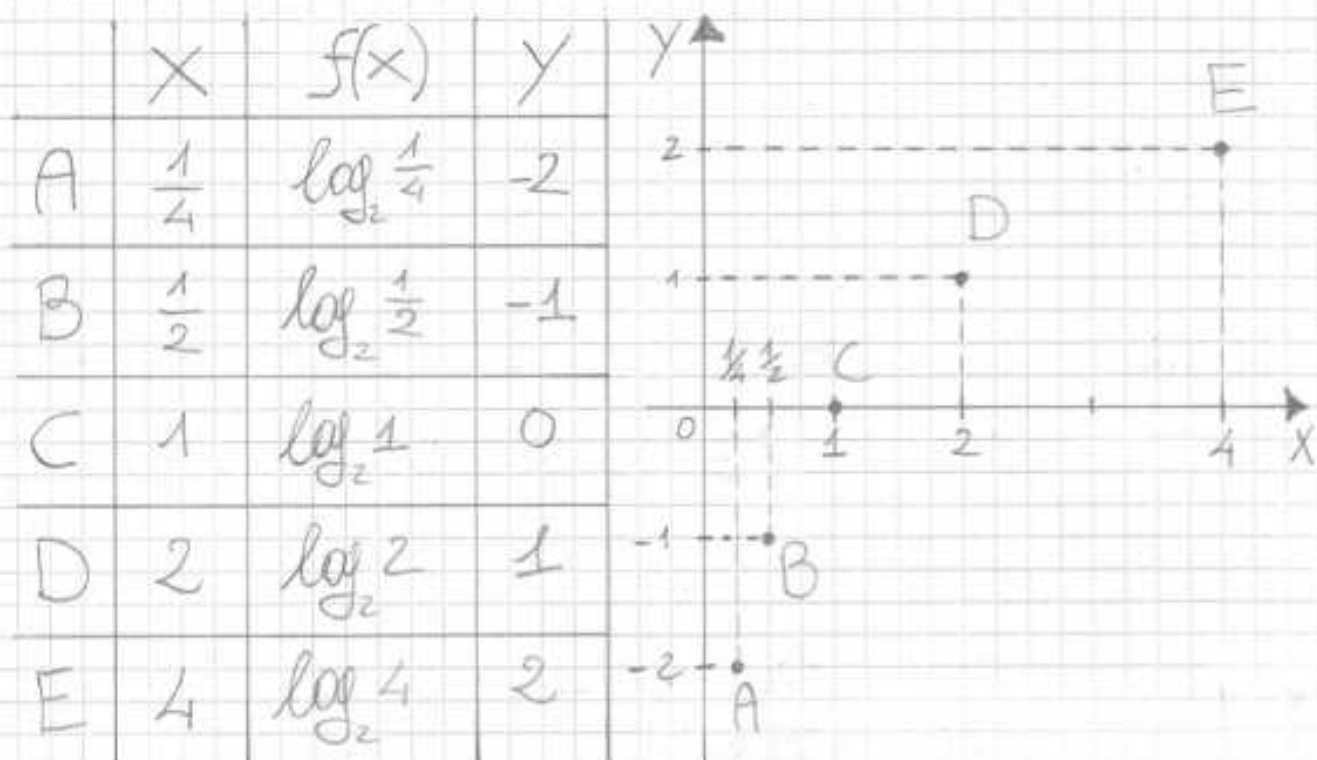
PER VALUTARE L'ANDAMENTO NEL PIANO CARTESIANO DELLA FUNZIONE LOGARITMICA DISTINGUIAMO I 2 DIVERSI CASI IN CUI $a > 1$ ED $0 < a < 1$, CON DUE SEMPLICI ESEMPI.

I° CASO - $a > 1$

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA FUNZIONE:

$$y = \log_2 x \quad x \in \mathbb{R}^+$$

DETERMINIAMO QUALCHE SUO PUNTO E RAPPRESENTIAMO LI NEL PIANO CARTESIANO:



DA QUESTO SI EVINCE SIA ANALITICAMENTE CHE GRAFICAMENTE CHE LA Y CRESCE AL CRESCERE DELLA X, CIOÈ LA FUNZIONE È CRESCENTE.

FUNZIONE LOGARITMO

VEDIAMO CHE VALORI ASSUME LA y QUANDO LA x SI AVVICINA, PER VALORI POSITIVI, ALLO ZERO (LIMITE INFERIORE DEL DOMINIO):

DALLA FUNZIONE $y = \log_2 x$

PER LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO POSSIAMO SCRIVERE

$$2^y = x$$

LA x TENDE A 0^+ , A ZERO DA DESTRA (PER VALORI POSITIVI), E QUINDI POSSIAMO SCRIVERE ANCHE:

$$x = 0^+ = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 2^{-\infty}$$

DI CONSEGUENZA

CIOÈ $2^y = 2^{-\infty}$

$$y = -\infty$$

TUTTO QUESTO SI SCRIVE CON LA NOTAZIONE DI LIMITE:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_2 x) = -\infty$$

MENTRE SE LA x CRESCE IN MANIERA INFINITA

$$2^y = +\infty = 2^{+\infty}$$

CIOÈ

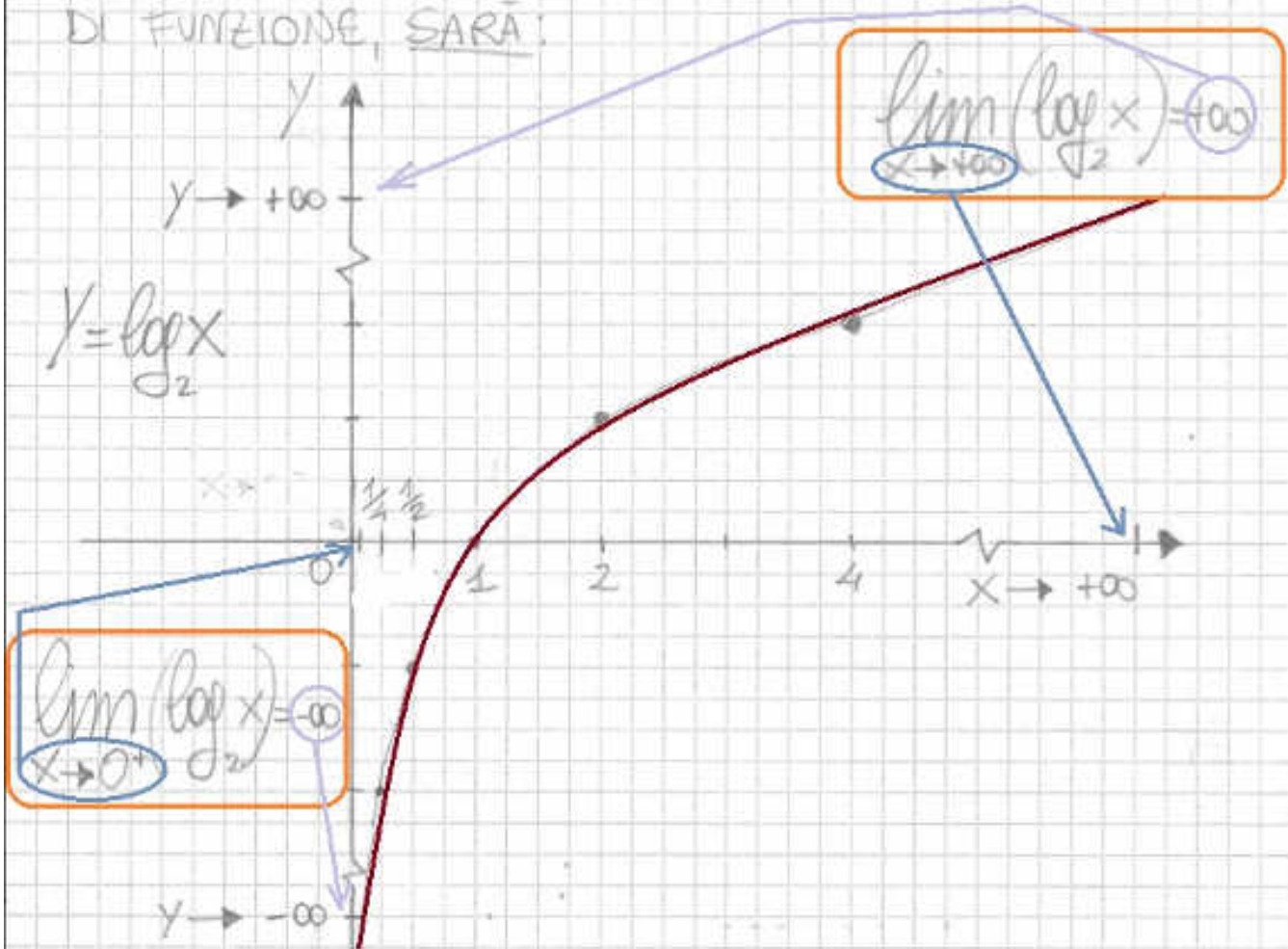
$$y = +\infty$$

PERCHÈ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2 x) = +\infty$$

FUNZIONE LOGARITMO

QUINDI LA CURVA LOGARITMICA DEL NOSTRO ISOTIPO DI FUNZIONE, SARÀ:



II° CASO - $0 < a < 1$

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA FUNZIONE:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad x \in \mathbb{R}^+$$

	A	B	C	D	E
X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
f(x)	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} 1$	$\log_{\frac{1}{2}} 2$	$\log_{\frac{1}{2}} 4$
y	2	1	0	-1	-2

SI EVINCE CHE LA Y DECRESCe AL CRESCERE DELLA X
(FUNZIONE DECRESCENTE)

FUNZIONE LOGARITMO

POI DALLA FUNZIONE

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

SAPPIAMO CHE

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$$

CIOÈ

$$\frac{1}{2^y} = x \Rightarrow 2^{-y} = x$$

MA SE

$$x = 0^+ = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 2^{-\infty}$$

ALLORA

$$2^{-y} = 2^{-\infty}$$

$$-y = -\infty \Rightarrow y = +\infty$$

IL CHE VADE A DIRE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) = +\infty$$

MENTRE

$$x = +\infty = 2^{+\infty}$$

ED

$$2^{-y} = 2^{+\infty}$$

ALLORA

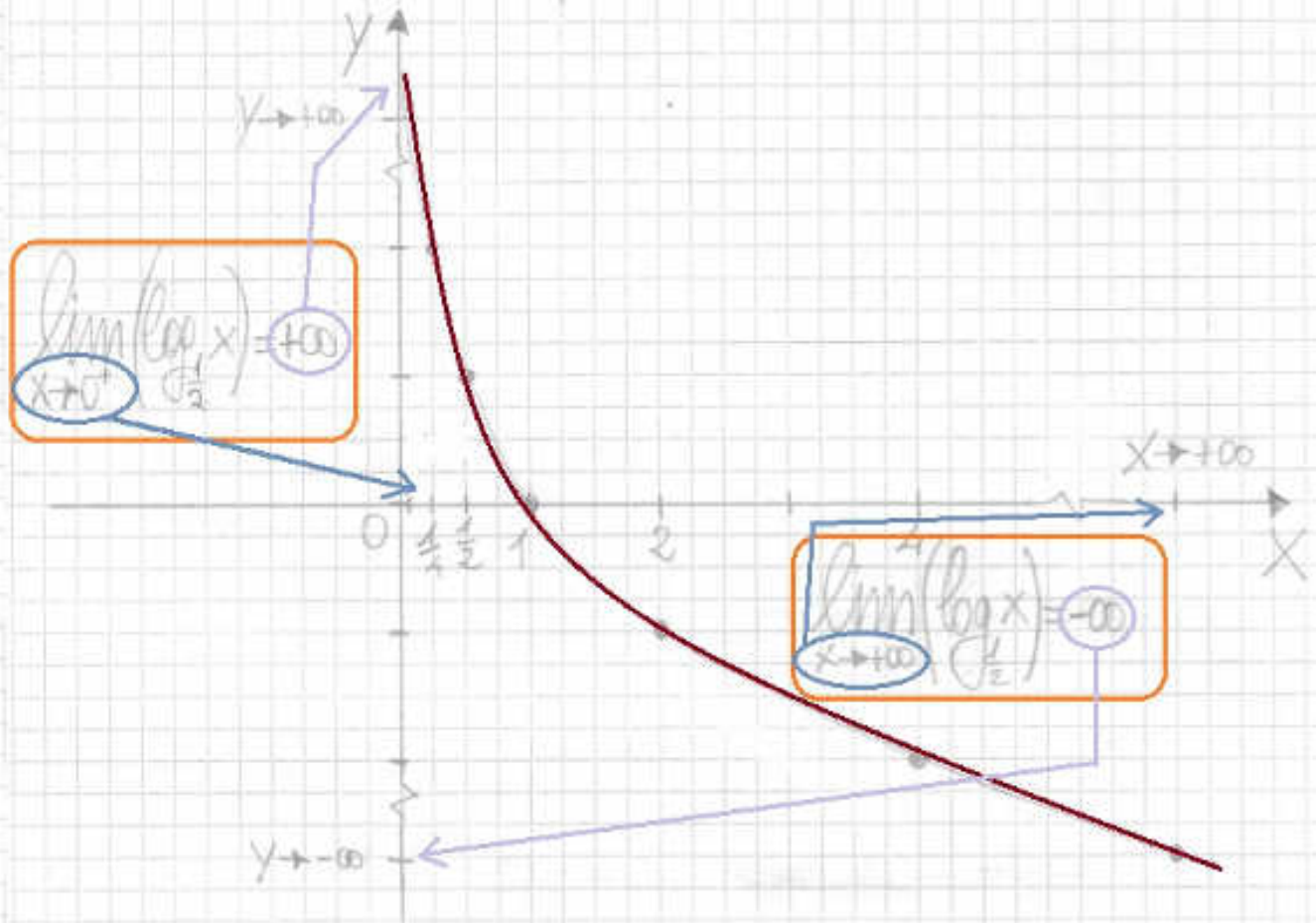
$$-y = +\infty \Rightarrow y = -\infty$$

IL CHE EQUIVALE A DIRE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) = -\infty$$

FUNZIONE LOGARITMO

E LA CURVA LOGARITMICA SARÀ



IN GENERALE:

$$y = \log_a x$$

