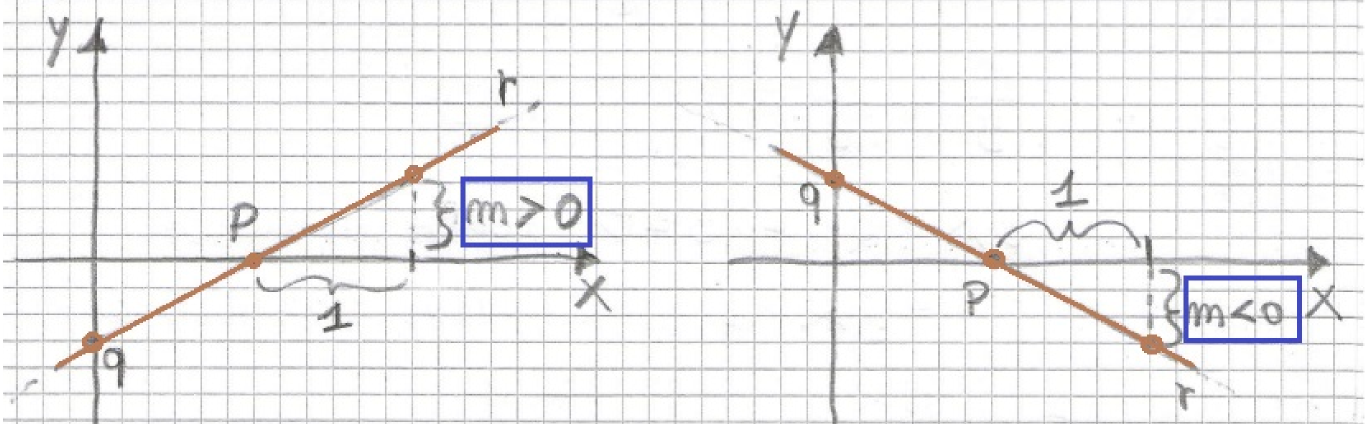
1

LA RETTA

L'ENTE GEOMETRICO FONDAMENTALE DENOMINATO RETTA, IN GENERALE È UN INSIEME INFINITO DI PUNTI ALLINEATI NEL PIANO O NELLO SPAZIO.
NEL PIANO CARTESIANO VIENE RAPPRESENTATA ALGEBRICAMENTE DA UN'EQUAZIONE CON DUE CARATTERISTICHE FONDAMENTALI, IL COEFFICIENTE ANGOLARE E L'ORDINATA ALL'ORIGINE O INTERCETTA (COMUNEMENTE DETTO TERMINE NOTO DELL'EQUAZIONE).
DISEGNANDO NEL PIANO CARTESIANO UNA RETTA "r" CHE PASSA PER ENTRAMBI GLI ASSI NEL PUNTO "p" (SU x) E NEL PUNTO "q" (SU y):



L'EQUAZIONE ALGEBRICA CHE LA RAPPRESENTA PUÒ ESSERE DI TRE FORME DIVERSE:

1) FORMA IMPLICITA

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

2) FORMA ESPLICITA

$$\boxed{y = mx + q}$$

DOVE

$m = -\frac{a}{b}$ COEFFICIENTE ANGOLARE

$q = -\frac{c}{b}$ TERMINE NOTO O INTERCETTA

3) FORMA SEGMENTARIA (SOLO SE LA RETTA TOCCA ENTRAMBI GLI ASSI)

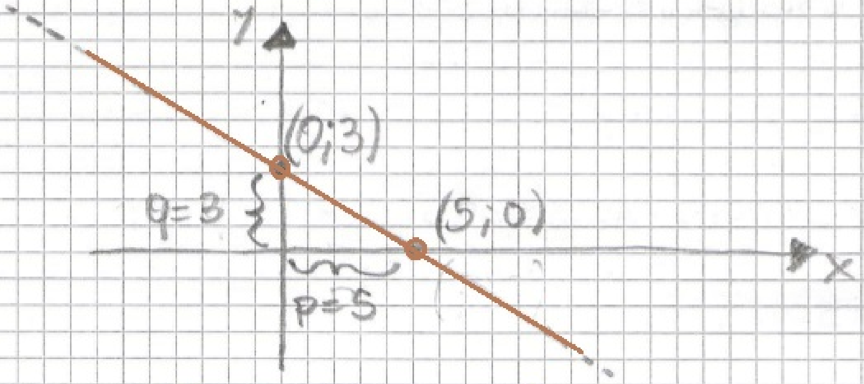
$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

DOVE

$\boxed{p}$ PUNTO D'INTERSEZIONE TRA LA RETTA E L'ASSE X

$\boxed{q}$ PUNTO D'INTERSEZIONE TRA LA RETTA E L'ASSE Y

CIOÈ AD ESEMPIO:



$$\boxed{\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1}$$

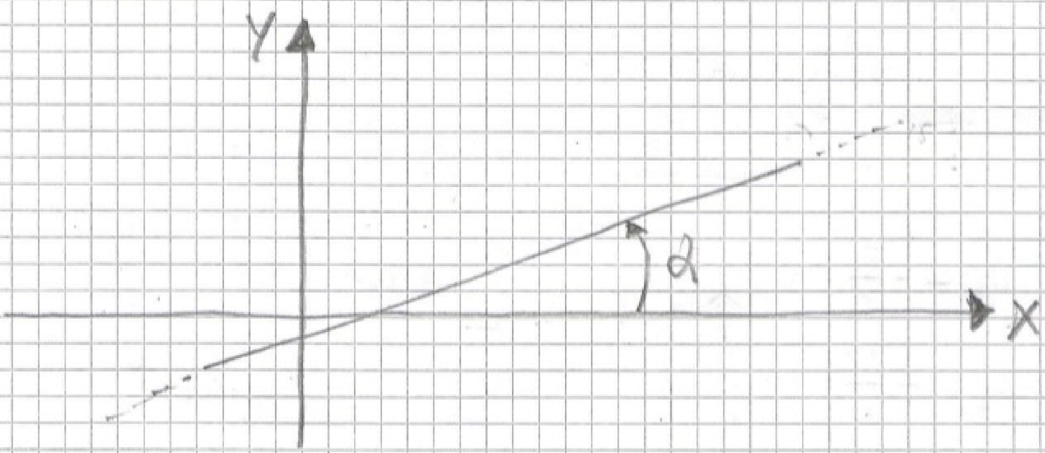
CIOÈ

$\boxed{3x+5y-15=0}$ FORMA IMPLICITA

$\boxed{y=-\frac{3}{5}x+3}$ FORMA ESPLICITA

OSSERVAZIONE:

IN GENERALE SI DICE CHE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA MISURA L'INCLINAZIONE (O PENDENZA) DELLA RETTA, PERCHÉ È LA MISURA DELLA TANGENTE DELL'ANGOLO "α" (ALFA) CHE LA RETTA FORMA CON L'ASSE DELLE ASCISSE (X), CIOÈ:



$m=\tan g(\alpha)$ PER $-90° < \alpha < +90°$

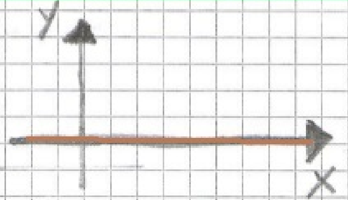
COSÌ SE LA RETTA È VERTICALE, CIOÈ PARALLELA ALL'ASSE Y, SI DICE CHE LA SUA PENDENZA È INFINITA, CIOÈ

$m = +\infty$ PERCHÉ $\alpha = 90°$ E $\tan(90°) = \pm\infty$

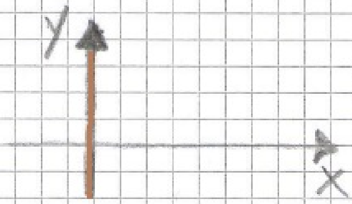
MENTRE SE LA RETTA È ORIZZONTALE, CIOÈ PARALLELA ALL'ASSE X,

$m = 0$ PERCHÉ $\alpha = 0$ E $\tan(0) = 0$

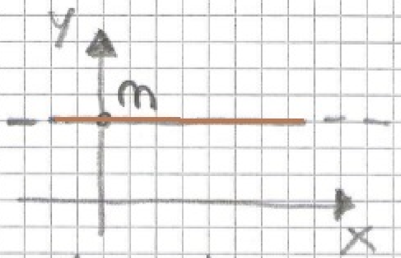
RETTE PARTICOLARI



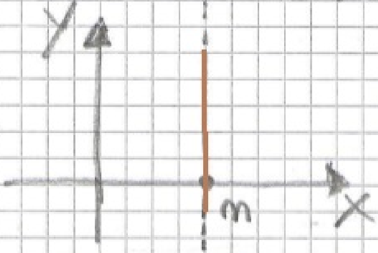
$\boxed{y = 0}$ COINCIDENTE CON L'ASSE X



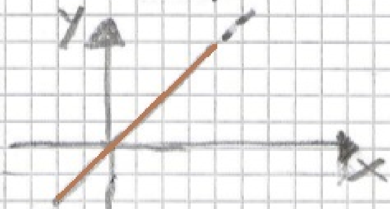
$\boxed{x = 0}$ COINCIDENTE CON L'ASSE Y



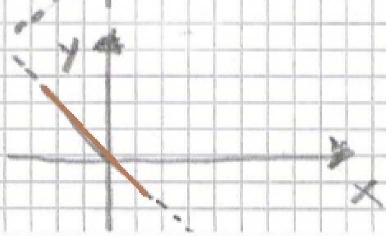
$\boxed{y = m}$ PARALLELA ALL'ASSE X



$\boxed{x = m}$ PARALLELA ALL'ASSE Y



$\boxed{y = x}$ BISETTRICE DEL I E III QUADRANTE



$\boxed{y = -x}$ BISETTRICE DEL II E IV QUADRANTE

LA TEORIA SULLA RETTA

SAPENDO CHE PER DUE PUNTI PASSA UNA ED UNA SOLA RETTA, PER DISEGNARE UNA RETTA BASTA TROVARE LE COORDINATE DI ALMENO DUE SUOI PUNTI E CONGIUNGERLI. LE COORDINATE DI UN PUNTO DI UNA RETTA SI TROVANO ASSEGNANDO ALLA X UN VALORE A PIACERE E CALCOLANDO IL CORRISPONDENTE VALORE DI Y TRAMITE L'EQUAZIONE ALGEBRICA DELLA RETTA.
AD ESEMPIO SE ABBIAMO LA RETTA RAPPRESENTATA DALL'EQUAZIONE

$$\boxed{y=2x-1}$$

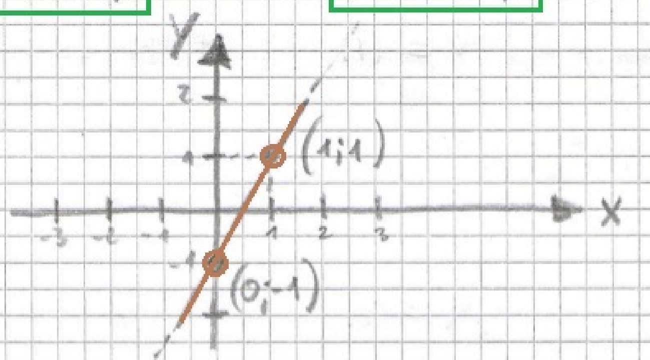
MEDIANTE IL COSIDDETTO METODO TABELLARE, SI AVRÀ:

X	$y=2x-1$	Y
0	$y=2\cdot 0-1$	-1
1	$y=2\cdot(1)-1$	1

CIOÈ LA RETTA PASSA PER I PUNTI DI COORDINATE

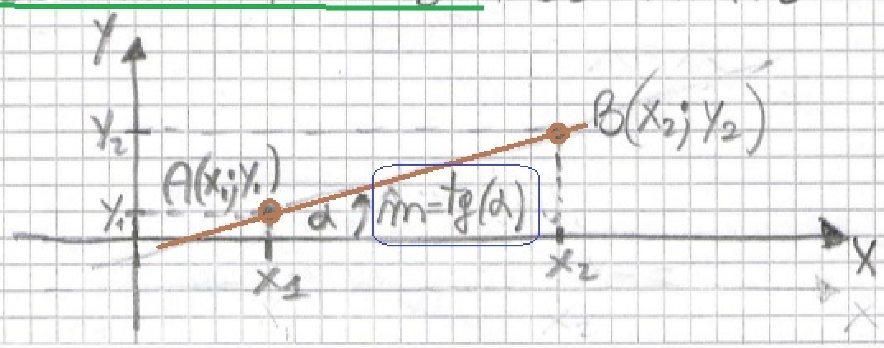
$$\boxed{(0;-1)} \quad e \quad \boxed{(1;1)}$$

COSÌ:



RICERCA DELL'EQUAZIONE DI UNA RETTA

DATI DUE PUNTI A e B NEL PIANO



2

DI COORDINATE GENERICHE

$$\boxed{A(x_1; y_1)} \quad e \quad \boxed{B(x_2; y_2)}$$

LA FORMULA PER TROVARE L'UNICA RETTA PASSANTE PER TALI PUNTI È:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

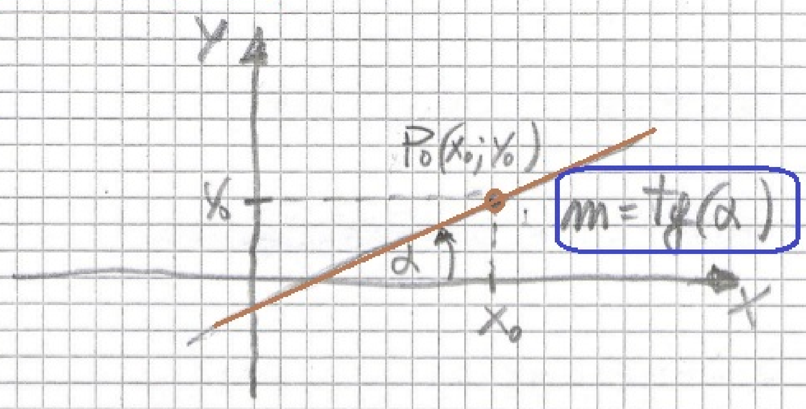
RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

MENTRE SE SI VUOLE DETERMINARE DIRETTAMENTE IL COEFFICIENTE ANGOLARE SENZA DETERMINARE LA RETTA:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

DATO INVECE UN PUNTO P NEL PIANO ED IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA PASSANTE PER ESSO

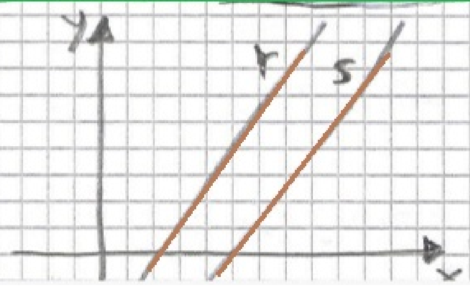


SI HA

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

RETTA PER UN PUNTO CON COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO

RETTE PARALLELE

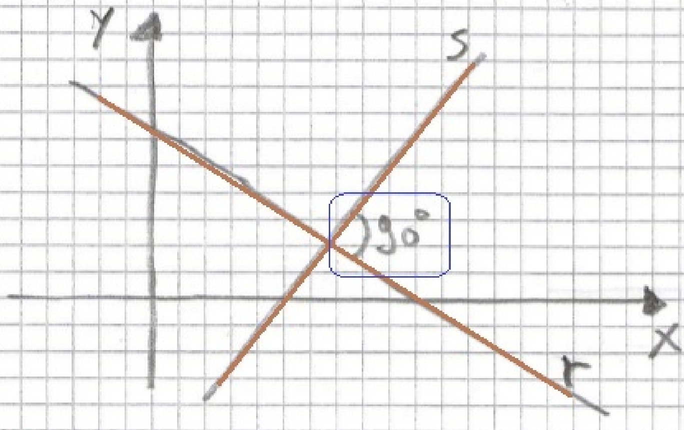


DUE RETTE r ED s SI DICONO PARALLELE SE HANNO LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE, CIOÈ

$$\boxed{m_r = m_s}$$

LA TEORIA SULLA RETTA

RETTE PERPENDICOLARI



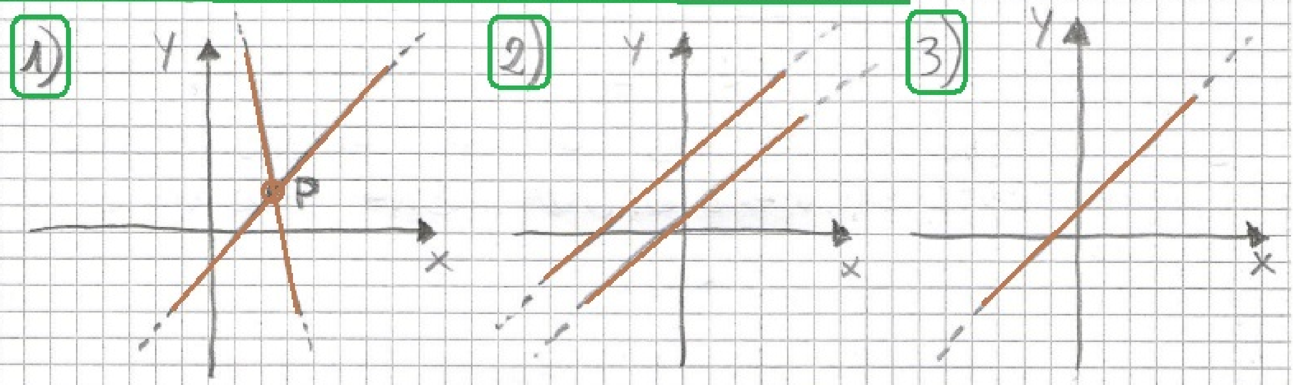
DUE RETTE SI DICONO PERPENDICOLARI SE HANNO I COEFFICIENTI ANGOLARI OPPOSTI E RECIPROCI, CIOÈ

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

(ANTIRECIPROCI)

INTERSEZIONE DI DUE RETTE

CONSIDERANDO 2 RETTE SUL PIANO CARTESIANO, QUESTE POSSONO DISPORSI IN TRE MODI DIVERSI



INCIDENTI PARALLELE COINCIDENTI

1) INCIDENTI

SONO 2 RETTE CHE SI INCONTRANO IN UN PUNTO P

2) PARALLELE

SONO 2 RETTE CHE NON SI INCONTRANO MAI (NON HANNO PUNTI IN COMUNE)

3) COINCIDENTI

SONO RETTE CHE HANNO TUTTI I PUNTI IN COMUNE (UNA SOVRAPPOSTA ALL'ALTRA)

PER DETERMINARE LE COORDINATE DEL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$ DI INTERSEZIONE DI 2 RETTE INCIDENTI

r: $\boxed{y = m_r x + q_r}$ s: $\boxed{y = m_s x + q_s}$

a) SI METTONO A SISTEMA LE EQUAZIONI DELLE 2 RETTE

$$\begin{cases} y = m_r x + q_r \\ y = m_s x + q_s \end{cases}$$

b) SI RISOLVE IL SISTEMA (VEDASI TEORIA SUI SISTEMI LINEARI)

c) LE SOLUZIONI x_0, y_0 DEL SISTEMA SONO LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 RETTE.

APPARTENENZA DI UN PUNTO AD UNA RETTA

PER VERIFICARE SE UN PUNTO $P_0(x_0; y_0)$ APPARTIENE AD UNA RETTA:

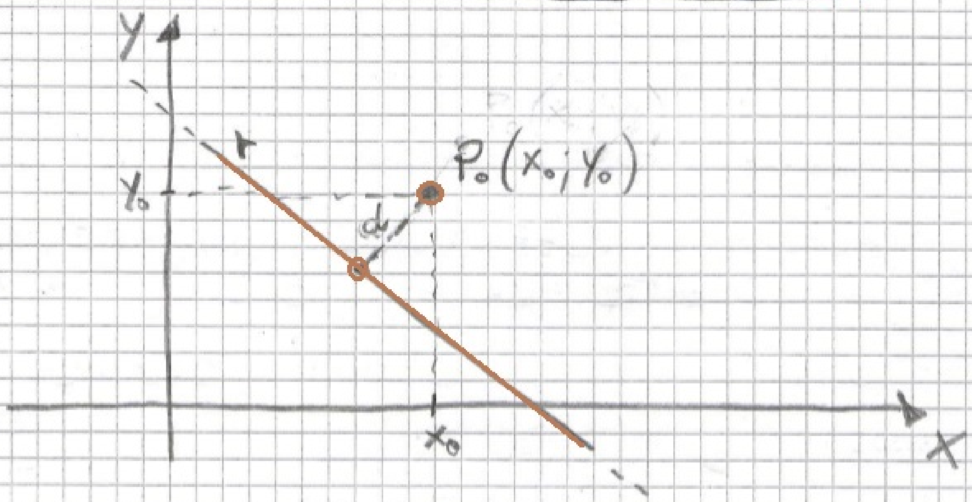
a) SI SOSTITUISCONO LE COORDINATE x_0, y_0 DEL PUNTO ALLA X ED ALLA Y NELL'EQUAZIONE DELLA RETTA, CIOÈ

$$\boxed{y_0 = m x_0 + q}$$

b) SI SVILUPPANO I CALCOLI

c) SE SI OTTIENE UNA IDENTITÀ, IL PUNTO APPARTIENE ALLA RETTA

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA



DATO UN PUNTO P_0 DI COORDINATE x_0, y_0 ED UNA RETTA r NEL PIANO, SI HA:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN FORMA IMPLICITA

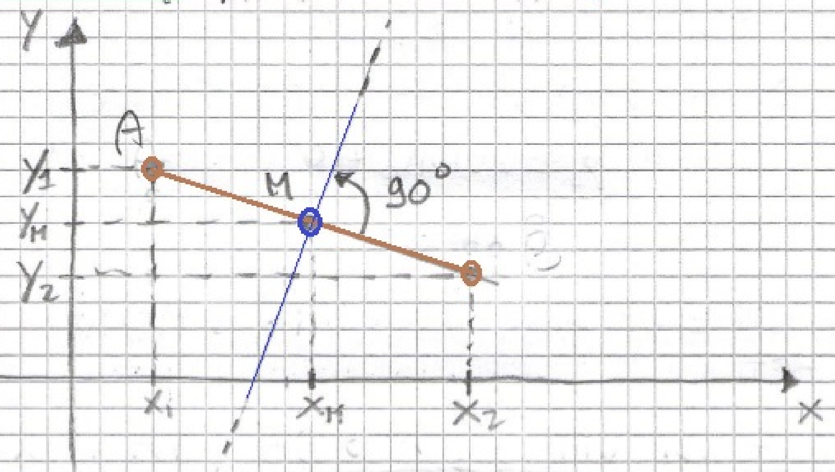
$$d=\frac{|y_0-mx_0-q|}{\sqrt{m^2+1}}$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN FORMA ESPLICITA

DOVE IL NUMERATORE È POSTO IN VALORE ASSOLUTO IN QUANTO UNA DISTANZA NON PUÒ ASSUMERE VALORE NEGATIVO.

ASSE DI UN SEGMENTO

DATI 2 PUNTI $A(x_1;y_1)$ E $B(x_2;y_2)$ NEL PIANO CARTESIANO



PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DELL'ASSE DEL SEGMENTO $\overline{AB}$:

a) SI CALCOLA IL PUNTO MEDIO $M(x_M;y_M)$

b) SI CALCOLA IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DELLA RETTA PASSANTE PER A e B.

c) SI CONSIDERA COME COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE m_{ASSE} L'ANTIRECIPROCO DI QUELLO DELLA RETTA, CIOÈ

$$m_{ASSE}=-\frac{1}{m}$$

d) SI DETERMINA LA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO M E COEFFICIENTE ANGOLARE m_{ASSE}

(3)

BISETTRICI DEGLI ANGOLI FORMATI DA 2 RETTE NON-PARALLELE

DATE LE EQUAZIONI DI 2 RETTE NON PARALLELE IN FORMA IMPLICITA r e s:

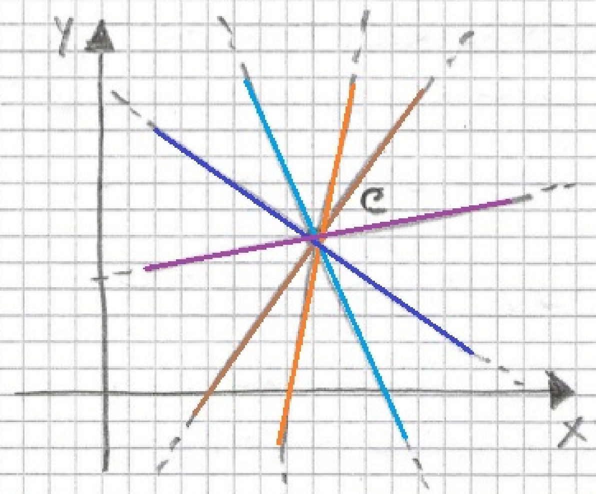
$$r: \boxed{a_1x + b_1y + c_1 = 0} \qquad s: \boxed{a_2x + b_2y + c_2 = 0}$$

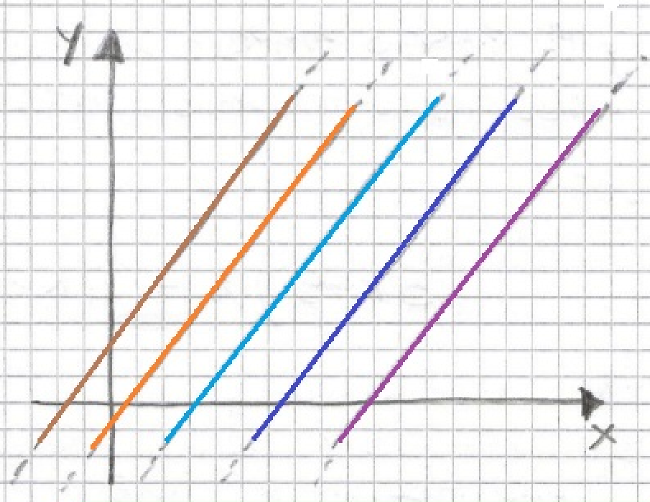
L'EQUAZIONE DELLE BISETTRICI DEGLI ANGOLI FORMATI DA r E s È:

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

FASCI DI RETTE

UN FASCIO DI RETTE È UN INSIEME DI RETTE NEL PIANO CHE HANNO IN COMUNE UN PUNTO O UNA DIREZIONE





SE HANNO UN PUNTO C IN COMUNE DETTO CENTRO DEL FASCIO, SI DICE **FASCIO PROPRIO**

SE HANNO LA STESSA DIREZIONE CIOÈ STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE, SI DICE **FASCIO IMPROPRIO**

L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI RETTE IN GENERALE SI PRESENTA IN FORMA IMPLICITA (COME PER LA RETTA) E IN ESSA, OLTRE ALLE INCOGNITE X e Y, VI È ALMENO UNA VOLTA UN'ALTRA LETTERA (GENERALMENTE K), DETTA PARAMETRO.

I) $\boxed{2x+3ky+k=0}$ II) $\boxed{3x-y+k=0}$

PER CLASSIFICARE UN FASCIO DI RETTE BISOGNA CALCOLARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE

$$\boxed{m=-\frac{a}{b}}$$

SE m CONTIENE IL PARAMETRO K IL FASCIO È PROPRIO ALTRIMENTI, SE IN m IL PARAMETRO K SI SEMPLIFICA, IL FASCIO È IMPROPRIO:

$m_{I}=-\frac{2}{3K}$ (PROPRIO)

$m_{II}=3$ (IMPROPRIO)

LA TEORIA SULLA RETTA

RETTE GENERATRICI DI UN FASCIO

LE RETTE GENERATRICI SONO LE 2 RETTE CHE DANNO ORIGINE AL FASCIO:

- NEL FASCIO PROPRIO LE RETTE GENERATRICI SONO INCIDENTI
- NEL FASCIO IMPROPRIO LE RETTE GENERATRICI SONO PARALLELE

DATA L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI RETTE,

$$\boxed{(3k+5)x-(4k+12)y+4k+12=0}$$

PER DETERMINARE LE SUE 2 RETTE GENERATRICI, SI SVILUPPANO I CALCOLI RACCOGLIENDO A FATTOR COMUNE IL PARAMETRO k, CIOÈ:

$$\boxed{3kx+5x-4ky-12y+4k+12=0}$$

$$k(\underbrace{3x-4y+4}_{I^a \text{ RETTA}})+\underbrace{5x-12y+12}_{II^a \text{ RETTA}}=0$$

RICERCA DEL CENTRO DI UN FASCIO DI RETTE PROPRIO

SI DETERMINANO LE 2 RETTE GENERATRICI, r e s, SI METTONO A SISTEMA, E LE SOLUZIONI DEL SISTEMA RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEL CENTRO DEL FASCIO

$$\boxed{C(x_0, y_0)}$$

SCRIVERE L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI RETTE

1) PARTENDO DALLE 2 RETTE GENERATRICI r e s, SI SCRIVE

$$\boxed{k\cdot r+s=0}$$

E SI SVILUPPANO I CALCOLI.

2) NOTO IL CENTRO $C(x_0; y_0)$ DI UN FASCIO DI RETTE PROPRIO

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0)}$$

3) NOTO IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DI UN FASCIO DI RETTE IMPROPRIO

$$\boxed{y=mx+k}$$

LA TEORIA SULLA RETTA

ESEMPIO

DATI I PUNTI $A(\underset{x_1}{2};\underset{y_1}{3})$ e $B(\underset{x_2}{4};\underset{y_2}{5})$

DETERMINIAMO IL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO $\overline{AB}$

$$\boxed{M(x_M;y_M)}$$

DOVE

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

CIOÈ

$$\boxed{x_M=\frac{2+4}{2}=3} \qquad \boxed{y_M=\frac{3+5}{2}=4}$$

QUINDI

$$\boxed{M(3;4)}$$

A QUESTO PUNTO SAPPIAMO CHE L'ASSE DI $\overline{AB}$ È LA RETTA PERPENDICOLARE AL SEGMENTO $\overline{AB}$ CHE PASSA PER IL SUO PUNTO MEDIO.

TROVIAMO QUINDI L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER A e B E L'ANTIRECIPROCO DEL SUO COEFFICIENTE ANGOLARE SARÀ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE DI $\overline{AB}$.

COSÌ, CONSIDERANDO LA FORMULA DELLA RETTA PER 2 PUNTI:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

CIOÈ

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-2}{4-2}$$

$$\frac{y-3}{2}=\frac{x-2}{2}$$

MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER 2

$$\cancel{2}\cdot\frac{y-3}{\cancel{2}}=\frac{x-2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}$$

$$y-3=x-2$$

$$y=x+3-2$$

QUINDI

$$\boxed{y = x + 1}$$

DOVE IL COEFFICIENTE ANGOLARE È

$$\boxed{m = 1}$$

MENTRE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE DI $\overline{AB}$ È IL SUO ANTIRECIPROCO, CIOÈ:

$$\boxed{m_{ASSE} = -\frac{1}{m}}$$

CIOÈ

$$m_{ASSE} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$$

A QUESTO PUNTO, ABBIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE, SAPPIAMO CHE PASSA PER IL PUNTO MEDIO M E SFRUTTIAMO LA FORMULA DELLA RETTA PER UN PUNTO CON COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO, CIOÈ:

$$\boxed{M(\underset{x_0}{3}; \underset{y_0}{4})}$$

COSÌ

$$\boxed{y - y_0 = m_{ASSE}(x - x_0)}$$

$$y - 4 = -1 \cdot (x - 3)$$

$$y - 4 = -x + 3$$

$$y = -x + 4 + 3$$

$$\boxed{y = -x + 7}$$

È L'EQUAZIONE DELL'ASSE DEL SEGMENTO $\overline{AB}$.