EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI NEL PIANO (1)

DEFINIZIONE

SI DEFINISCE LUOGO GEOMETRICO DI PUNTI IN UN PIANO, L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI, E SOLO QUEI PUNTI, CHE GODONO DI UNA DETERMINATA PROPRIETÀ.

UNA FIGURA GEOMETRICA È QUINDI UN LUOGO GEOMETRICO SE TUTTI I SUOI PUNTI E SOLO ESSI, SODDISFANO UNA PROPRIETÀ.

AFFERMARE CHE UNA FIGURA "F" È LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI CHE GODONO DELLA PROPRIETÀ "R", EQUIVALE A SCRIVERE:

$$\boxed{P \text{ È UN PUNTO DI } F \underset{\text{SE E SOLO SE}}{\Longleftrightarrow} P \text{ GODE DELLA PROPRIETÀ } R}$$

CONSIDERATO UN PIANO CARTESIANO ORTOGONALE, CON ASSE X (ASCISSA) ED ASSE Y (ORDINATA), OGNI SUO PUNTO VIENE ESPRESSO MEDIANTE LE COORDINATE

$$\boxed{P(x;y)}$$

UNA PROPRIETÀ GEOMETRICA CHE CARATTERIZZA I PUNTI DI UN DETERMINATO LUOGO GEOMETRICO PUÒ ESSERE TRADOTTA IN UNA RELAZIONE ALGEBRICA CHE LEGA L'ASCISSA E L'ORDINATA DEI SUOI PUNTI, DESCRITTA DA UN'EQUAZIONE DEL TIPO:

$$\boxed{f(x;y)=0}$$

CHE È SODDISFATTA SOLO DAI PUNTI $P(x;y)$ CHE FORMANO IL LUOGO.

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

SUPPONIAMO AD ESEMPIO CHE:

$$\boxed{x^2+y^2+2x-4y+3=0}$$

SIA L'EQUAZIONE DI UN LUOGO GEOMETRICO.
VERIFICHIAMO SE I PUNTI

$$\boxed{P(0;3) \quad E \quad Q(1;2)}$$

APPARTENGONO AD ESSO.
SOSTITUIAMO QUINDI LE COORDINATE DEI DUE PUNTI NELL'EQUAZIONE:

P) $\cancel{(0)^2}+(3)^2+\cancel{2\cdot 0}-4\cdot 3+3=0$

$9-12+3=0$

$0=0$

IL PUNTO P SODDISFA L'EQUAZIONE

Q) $(1)^2+(2)^2+2\cdot 1-4\cdot 2+3=0$

$1+4+2-8+3=0$

$+2\neq 0$

IL PUNTO Q NON SODDISFA L'EQUAZIONE

QUINDI P APPARTIENE AL LUOGO MENTRE Q NO.

INDIVIDUARE UN LUOGO GEOMETRICO

SUPPONIAMO DI DOVER DETERMINARE IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DISTANTI 4 DA UN CERTO PUNTO P DI COORDINATE (2;5).
SI POTREBBE ANCHE NON NOTARE IMMEDIATAMENTE CHE SI TRATTA DI UNA CIRCONFERENZA, PERCHÉ MOLTO

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

SPESSO I LUOGHI GEOMETRICI NON SONO FUNZIONI CANONICHE.

LE VARIABILI DEL PROBLEMA SONO SEMPLICEMENTE LA X e LA Y, CIOÈ LE COORDINATE DEL GENERICO PUNTO $P(x;y)$ DEL PIANO, CHE DEVE APPARTENERE AL LUOGO GEOMETRICO.

VISTA LA RICHIESTA DEL PROBLEMA, CONSIDERIAMO LA FORMULA GENERICA DELLA DISTANZA TRA DUE PUNTI NEL PIANO, CIOÈ CONSIDERATI:

$$\boxed{A(x_A;y_A) \quad \text{E} \quad B(x_B;y_B)}$$

LA LORO DISTANZA SARÀ:

$$\boxed{\text{DISTANZA}(\overline{AB}) = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}$$

A QUESTO PUNTO SE A È IL NOSTRO GENERICO PUNTO $P(x,y)$, B È IL PUNTO DI COORDINATE $(2;5)$, CONOSCENDO LA DISTANZA (CIOÈ 4), ALLORA:

$$\boxed{\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} = 4}$$

QUESTA È L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO RICHIESTO.

FACENDO QUALCHE CALCOLO ALGEBRICO, POSSIAMO TRASFORMARLA PER CAPIRE DI QUALE ESPRESSIONE IN PARTICOLARE SI TRATTA.

ELEVIAMO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO:

$$\boxed{\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right)^2 = 16}$$

SVILUPPIAMO I QUADRATI E RIORDINIAMO:

$$\boxed{x^2-4x+4+y^2-10y+25=16}$$

$$x^2+y^2-4x-10y+4+25-16=0$$
$$x^2+y^2-4x-10y+13=0$$

EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO DI TUTTI I PUNTI DISTANTI 4 DAL PUNTO DI COORDINATE (2,5), CIOÈ UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO 4 E CENTRO IN (2;5). VERIFICHIAMO CHE È VERO, CIOÈ SAPPIAMO CHE DATA L'EQUAZIONE CANONICA DELLA CIRCONFERENZA

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

LE COORDINATE DEL CENTRO SONO:

$$C(\alpha;\beta) \quad \text{DOVE} \quad \alpha=-\frac{a}{2} \quad \text{E} \quad \beta=-\frac{b}{2}$$

MENTRE IL RAGGIO È:

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$$

NEL NOSTRO CASO ESSENDO $a=-4$; $b=-10$ E $c=+13$ SI HA:

$$\alpha=-\frac{-4}{2}=2$$

$$\beta=-\frac{-10}{2}=5$$

QUINDI LE COORDINATE DEL CENTRO SONO $(2;5)$

$$r=\sqrt{2^2+5^2-13}=\sqrt{4+25-13}=\sqrt{16}=4$$ CHE È IL RAGGIO

ESEMPI

1) DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO IN CUI TUTTI I PUNTI SONO EQUIDISTANTI, CIOÈ HANNO

LA STESSA DISTANZA, DA UN PUNTO $A(3,1)$ E DA UNA RETTA "r" PARALLELA ALL'ASSE X, $y=-1$ ②

IN QUESTO CASO, INDICHIAMO CON

$$P(x,y)$$

IL GENERICO PUNTO APPARTENENTE AL LUOGO, BISOGNA UGUAGLIARE L'ESPRESSIONE DELLA DISTANZA DI TALE PUNTO DAL PUNTO A E L'ESPRESSIONE DELLA DISTANZA DI TALE PUNTO DALLA RETTA "r".

LA DISTANZA DEL GENERICO PUNTO P DAL PUNTO A, COME SAPPIAMO È:

$$\overline{PA}=\sqrt{(x_P-x_A)^2+(y_P-y_A)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

MENTRE PER LA DISTANZA DALLA RETTA, PARTIAMO DALLA FORMULA IN GENERALE DELLA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA:

$$d(P,r)=\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

DOVE a, b E c SONO I COEFFICIENTI DELLA EQUAZIONE DELLA RETTA IN FORMA IMPLICITA. SCRIVIAMO QUINDI L'EQUAZIONE IN FORMA IMPLICITA DELLA RETTA "r":

$$y=-1 \Rightarrow y+1=0 \Rightarrow a=0;\ b=1;\ c=1$$

COSÌ:

$$d(P,r)=\frac{|0\cdot x_P+1\cdot y_P+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|y+1|}{1}=|y+1|$$

A QUESTO PUNTO EGUAGLIAMO LE 2 ESPRESSIONI:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=|y+1|$$

FACCIAMO IL QUADRATO DI ENTRAMBI I MEMBRI:

$$\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}\right)^2=\left(|y+1|\right)^2$$

CIOÈ:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(y+1)^2$$

RISOLVIAMO I QUADRATI:

$$x^2-6x+9+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{y^2}+2y+\cancel{1}$$

RIORDINIAMO E SOMMIAMO:

$$x^2-6x+9=4y$$

COSÌ:

$$\boxed{y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}}$$

È L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO CERCATO, CHE RAPPRESENTA UNA PARABOLA NEL PIANO CON COEFFICIENTI $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$ E $c=\frac{9}{4}$, FUOCO PROPRIO IL PUNTO A E DIRETTRICE LA RETTA "r" – VERIFICHIAMO

LE COORDINATE DEL FUOCO DI UNA GENERICA PARABOLA SONO:

$$F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

CIOÈ:

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\cancel{4}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=0$$

QUINDI:

$$\boxed{F\left(-\frac{-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{1}{4}};\frac{1-0}{4\cdot\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2};\frac{1}{1}\right)=\left(3;1\right)}$$

MENTRE LA DIRETTRICE È:

$$d:\ y=\frac{-1-\Delta}{4a}=\frac{-1-0}{\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\boxed{d:\ y=-1}$$

(C.V.V.)

$\boxed{2}$) DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO IN CUI TUTTI I PUNTI SONO EQUIDISTANTI DA 2 PUNTI $A(1;3)$ E $B(5;1)$.

INDICATO CON

$$P(x;y)$$

IL GENERICO PUNTO, DOVRÀ ESSERE:

$$\overline{PA}=\overline{PB}$$

CIOÈ:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}$$

SVOLGENDO:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-5)^2+(y-1)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-6y+9=\cancel{x^2}-10x+25+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}$$

$$-4y=-8x+16$$

$$\boxed{y=2x-4}$$

CHE IN DEFINITIVA È L'ASSE DEL SEGMENTO $\overline{AB}$.

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

LUOGHI GEOMETRICI CON EQUAZIONI IN FORMA CANONICA NOTE

1) PARABOLA

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO "F" DETTO FUOCO E DA UNA RETTA "d" DETTA DIRETTRICE, CIOÈ:

$y = ax^2 + bx + c$ CON LA DIRETTRICE PARALLELA ALL'ASSE X

$x = ay^2 + by + c$ CON LA DIRETTRICE PARALLELA ALL'ASSE Y

2) CIRCONFERENZA

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO "C" DETTO CENTRO, CIOÈ:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ EQUAZIONE CANONICA COMPLETA

3) ELLISSE

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO TALI CHE LA SOMMA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI FISSI "F_1" ED "F_2" DETTI FUOCHI È COSTANTE, CIOÈ:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ CON $a>b$ ASSE MAGGIORE PARALLELO ALL'ASSE X

CON $a<b$ ASSE MAGGIORE PARALLELO ALL'ASSE Y

4) IPERBOLE

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO TALI CHE LA DIFFERENZA IN VALORE ASSOLUTO DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI FISSI "F_1" ED "F_2" DETTI FUOCHI È COSTANTE, CIOÈ:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ CON $a>b$ FUOCHI SULL'ASSE X

CON $a<b$ FUOCHI SULL'ASSE Y