LA TEORIA SULLA PARABOLA

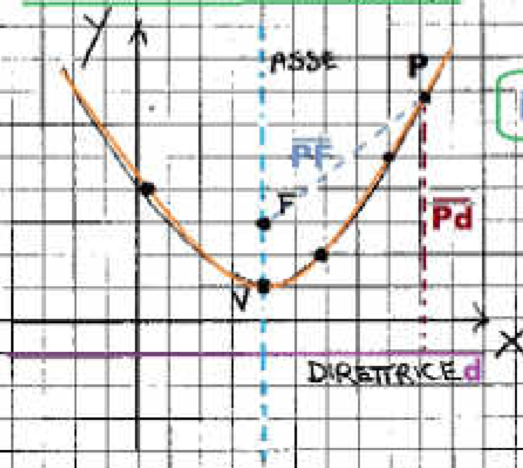
LA PARABOLA

SI DEFINISCE PARABOLA IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI P DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO F DETTO FUOCO E DA UNA RETTA d DETTA DIRETTRICE CIOÈ

$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

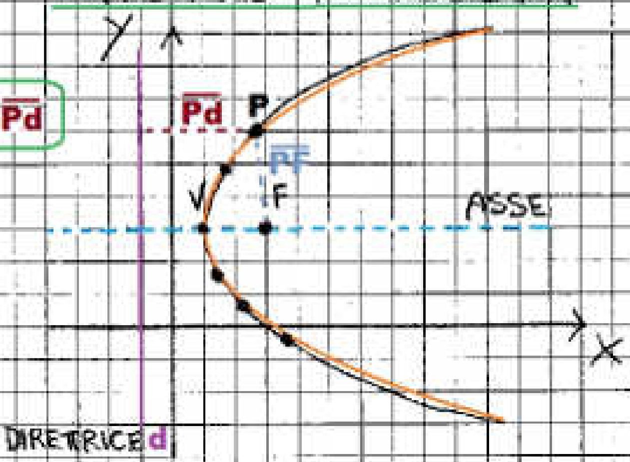
A SECONDA SE LA DIRETTRICE È PARALLELA ALL'ASSE X O È PARALLELA ALL'ASSE Y SI INDIVIDUANO 2 TIPI DI PARABOLA:

CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y



$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE X



LA LORO EQUAZIONE CANONICA È:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \qquad \boxed{x = ay^2 + by + c}$$

LE COORDINATE DEL VERTICE SONO:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad \Delta = b^2 - 4ac} \qquad \boxed{V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right) \quad \Delta = b^2 - 4ac}$$

LE COORDINATE DEL FUOCO SONO:

$$\boxed{F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)} \qquad \boxed{F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)}$$

LA TEORIA SULLA PARABOLA

EQUAZIONE DELL'ASSE DI SIMMETRIA:

$$X = -\frac{b}{2a}$$

$$Y = -\frac{b}{2a}$$

EQUAZIONE DELLA DIRETTRICE:

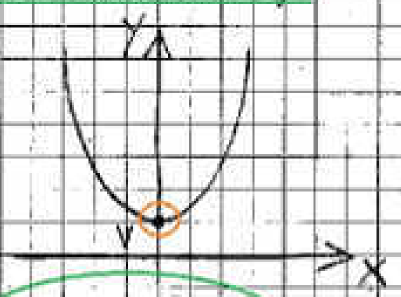
$$Y = \frac{-1-\Delta}{4a}$$

$$X = \frac{-1-\Delta}{4a}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA NEL PIANO CARTESIANO:

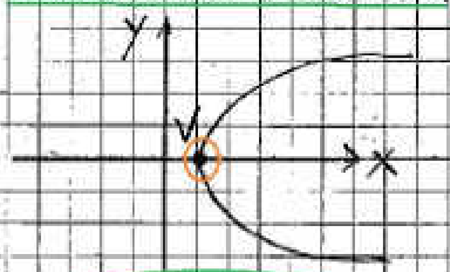
SE $b=0$

VERTICE SULL'ASSE Y



$$Y = aX^2 + C$$

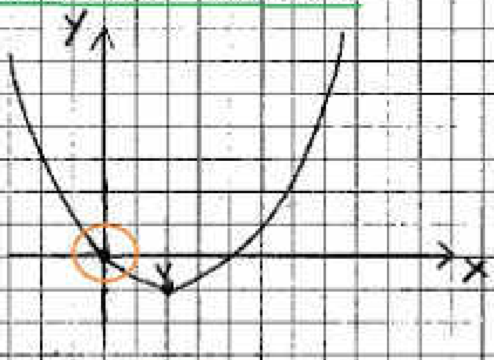
VERTICE SULL'ASSE X



$$X = aY^2 + C$$

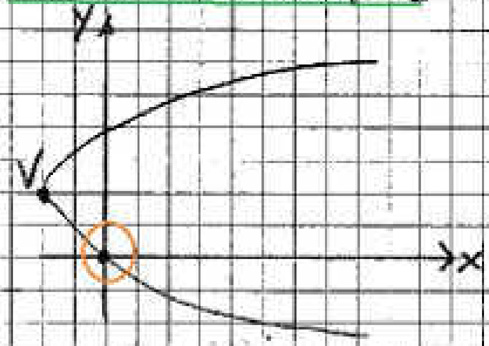
SE $C=0$

PASSA PER L'ORIGINE



$$Y = aX^2 + bX$$

PASSA PER L'ORIGINE

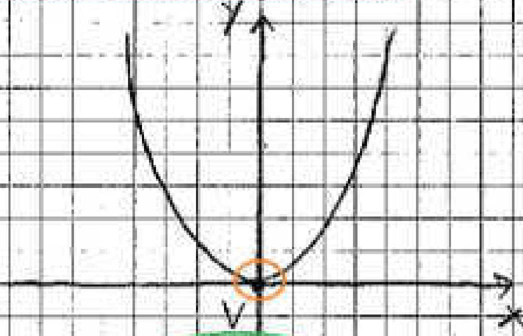


$$X = aY^2 + bY$$

LA TEORIA SULLA PARABOLA

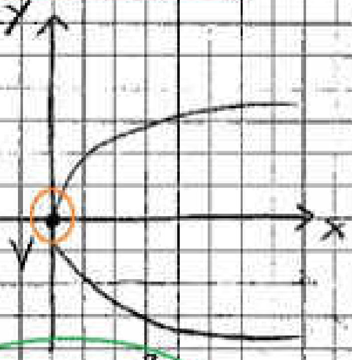
SE $b=0$ E $c=0$

VERTICE NELL'ORIGINE



$y=ax^2$

VERTICE NELL'ORIGINE



$x=ay^2$

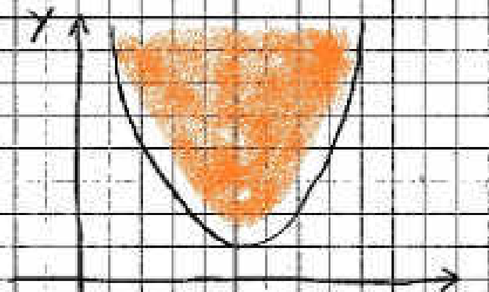
SE $a=0$ IL POLINOMIO DEGENERA IN UNA RETTA

$$y = bx + c$$

DOVE b DIVENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA

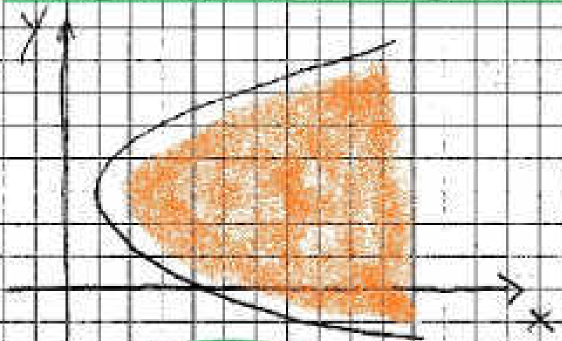
SIGNIFICATO GRAFICO DEL COEFFICIENTE "a"

CONCAVITÀ VERSO L'ALTO



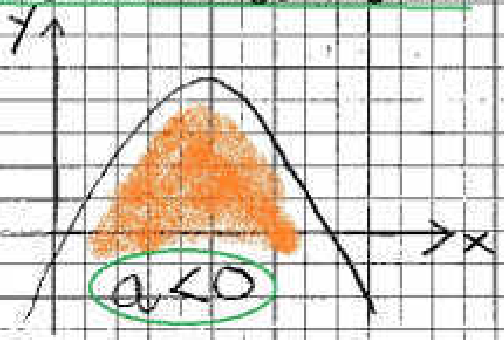
$a>0$

CONCAVITÀ VERSO DESTRA



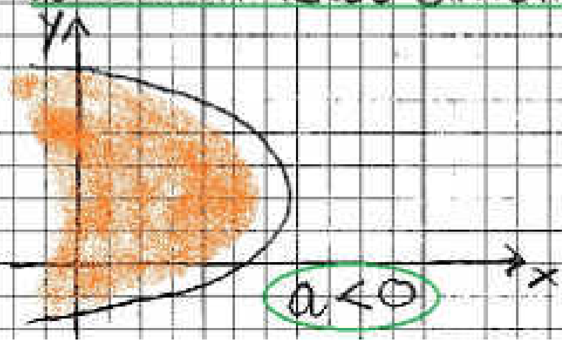
$a>0$

CONCAVITÀ VERSO IL BASSO



$a<0$

CONCAVITÀ VERSO SINISTRA

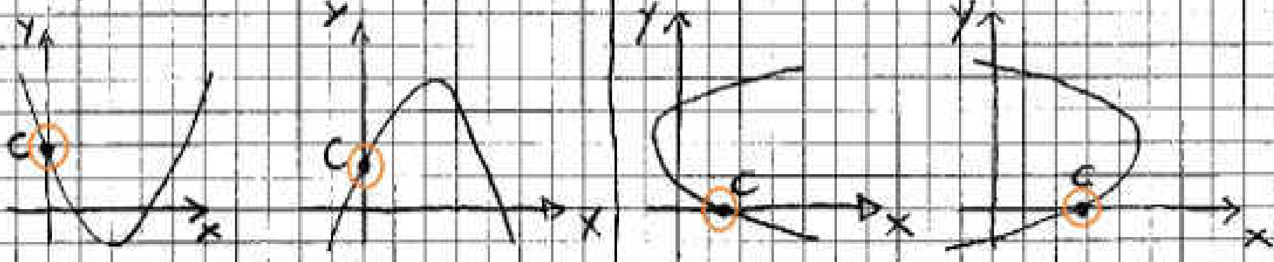


$a<0$

SIGNIFICATO GRAFICO DEL COEFFICIENTE "C"

INTERSEZIONE DELLA CURVA CON L'ASSE Y

INTERSEZIONE DELLA CURVA CON L'ASSE X



RICERCA DELL'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

A) EQUAZIONE DELLA PARABOLA PASSANTE PER TRE PUNTI:

SUPPONIAMO DI AVERE LE COORDINATE DI TRE PUNTI:

$$A(x_A;y_A) \quad B(x_B;y_B) \quad C(x_C;y_C)$$

LE SOSTITUIAMO UNA ALLA VOLTA NELL'EQUAZIONE GENERICA DELLA PARABOLA

$$y=ax^2+bx+c$$

OTTENENDO UN SISTEMA DI TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE a, b, c.

$$\begin{cases} y_A=ax_A^2+bx_A+c \\ y_B=ax_B^2+bx_B+c \\ y_C=ax_C^2+bx_C+c \end{cases}$$

RISOLVENDO IL SISTEMA SI OTTENGONO I VALORI DI a, b E c, CON I QUALI POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA PASSANTE PER I TRE PUNTI DATI

$$Y=aX^2+bX+c$$

LA TEORIA SULLA PARABOLA

(2)

B) EQUAZIONE DELLA PARABOLA DATO IL FUOCO E LA DIRETTRICE:

PARTENDO DALLA DEFINIZIONE, CIOÈ LUOGO DEI PUNTI CHE HANNO LA STESSA DISTANZA DAL FUOCO E DALLA DIRETTRICE:

$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

INDICANDO CON $F(X_F; Y_F)$ IL FUOCO, CON $Y = Y_d$ L'EQUAZIONE DELLA DIRETTRICE, CON $P(X; Y)$ IL GENERICO PUNTO DELLA PARABOLA, SI HA:

$$\overline{Pd} = \frac{|aX + bY + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

MA ESSENDO LA DIRETTRICE DEL TIPO $Y = Y_d$, ALLORA

$Y - Y_d = 0$ DOVE $a = 0$ $b = 1$ E $c = -Y_d$

PERCHÉ LA GENERICA È $aX + bY + c = 0$

COSÌ

$$\overline{Pd} = \frac{|Y - Y_d|}{\sqrt{1}} = |Y - Y_d|$$

MENTRE:

$$\overline{PF} = \sqrt{(X - X_F)^2 + (Y - Y_F)^2}$$

ALLORA:

$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

$$\sqrt{(X - X_F)^2 + (Y - Y_F)^2} = |Y - Y_d|$$

$$(X - X_F)^2 + (Y - Y_F)^2 = (Y - Y_d)^2$$

A QUESTO PUNTO SVILUPPANDO I CALCOLI SI OTTIENE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

$$Y = aX^2 + bX + c$$

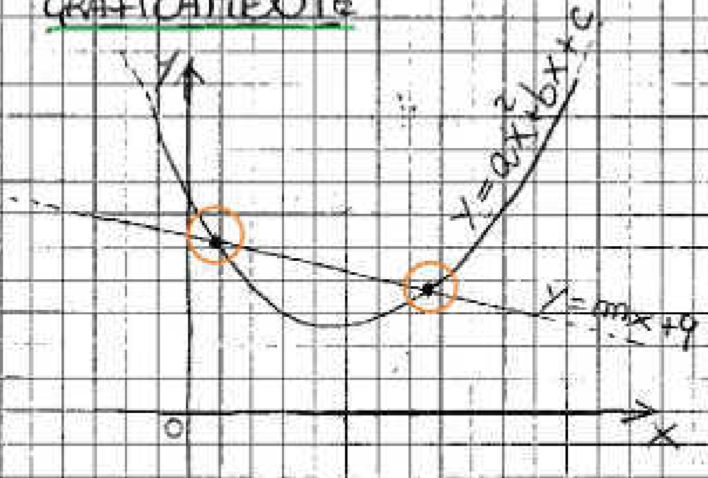
LA TEORIA SULLA PARABOLA

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTA E PARABOLA

CONSIDERANDO UNA PARABOLA ED UNA RETTA NEL PIANO, SI POSSONO VERIFICARE 4 DIVERSE SITUAZIONI:

1) LA RETTA È SECANTE LA PARABOLA:

GRAFICAMENTE



LA RETTA "TAGLIA" LA PARABOLA IN DUE PUNTI DISTINTI

ANALITICAMENTE

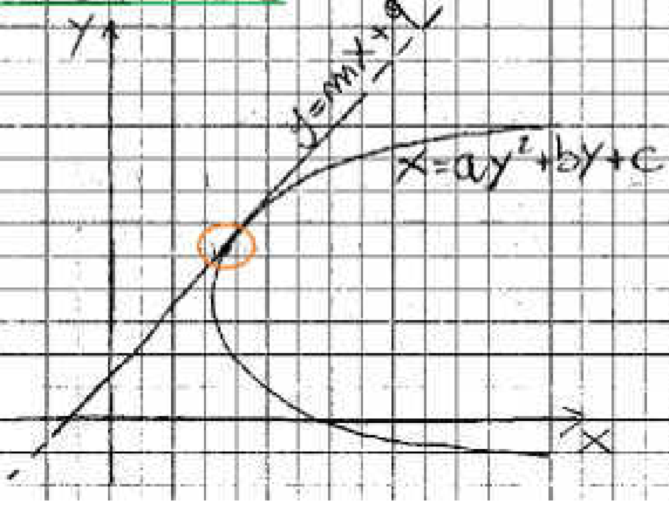
IL SISTEMA CON L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA E L'EQUAZIONE DELLA RETTA

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

AMMETTE DUE SOLUZIONI REALI E DISTINTE.

2) LA RETTA È TANGENTE ALLA PARABOLA

GRAFICAMENTE



LA RETTA "TOCCA" LA PARABOLA IN UN SOLO PUNTO

ANALITICAMENTE

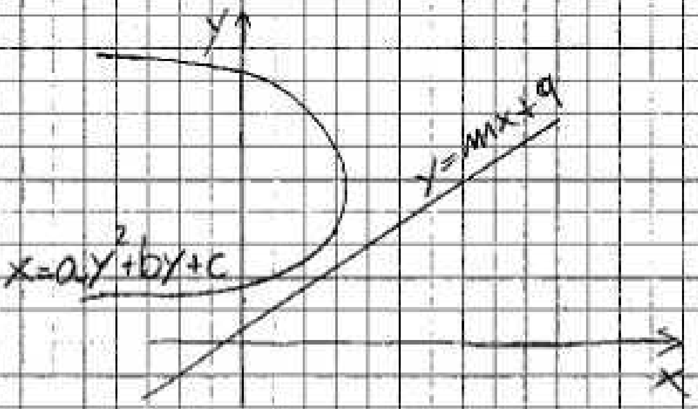
IL SISTEMA CON L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA E L'EQUAZIONE DELLA RETTA:

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

AMMETTE DUE SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI

3) LA RETTA È ESTERNA ALLA PARABOLA

GRAFICAMENTE



LA RETTA "NON TOCCA" LA PARABOLA IN NESSUN PUNTO

ANALITICAMENTE

IL SISTEMA CON L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA E L'EQUAZIONE DELLA RETTA

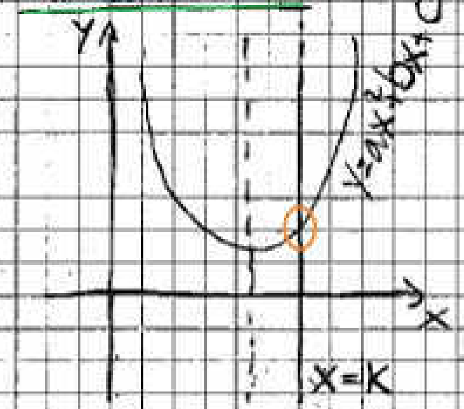
$$\begin{cases} x = ay^2 + by + e \\ y = mx + q \end{cases}$$

NON AMMETTE SOLUZIONI.

4) NEL CASO PARTICOLARE IN CUI LA RETTA È PARALLELA ALL'ASSE DI SIMMETRIA DELLA PARABOLA, ALLORA LA RETTA "INTERSECA" LA PARABOLA IN UN SOLO PUNTO.

LA TEORIA SULLA PARABOLA

GRAFICAMENTE



LA RETTA "TAGLIA" LA PARABOLA IN UN SOLO PUNTO

ANALITICAMENTE

IL SISTEMA

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x=k \end{cases}$$

AMMETTE UNA SOLUZIONE.

PROPRIETÀ GEOMETRICHE DEL POLINOMIO DI 2° GRADO NEL PIANO CARTESIANO

VISTA LA POSIZIONE RECIPROCA TRA LA RETTA E LA PARABOLA NEL PIANO, SE CONSIDERIAMO IL CASO PARTICOLARE DI UNA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y

$$y=ax^2+bx+c$$

E UNA RETTA COINCIDENTE CON L'ASSE X

$$y=0$$

SI OTTIENE:

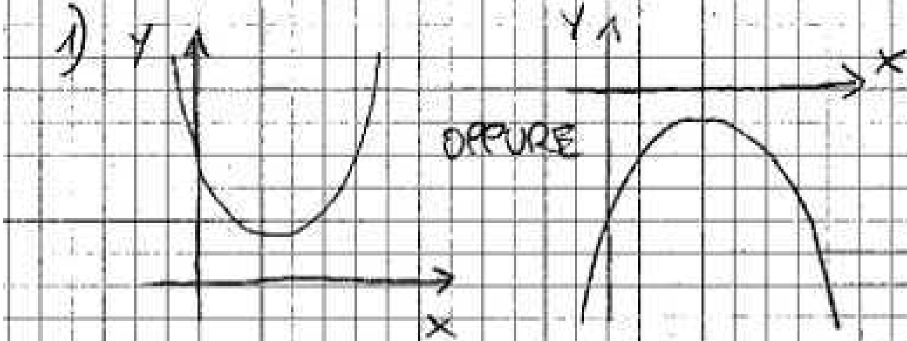
$$ax^2+bx+c=0$$

CIOÈ UN POLINOMIO DI 2° GRADO EGUAGLIATO A ZERO (EQUAZIONE DI 2° GRADO AD UNA INCOGNITA), CHE GEOMETRICAMENTE SIGNIFICA LA POSIZIONE RECIPROCA TRA UNA PARABOLA E L'ASSE X (DELLE ASCISSE) COME VISTO, QUESTA PUÒ ESSERE DI TRE TIPI:

LA TEORIA SULLA PARABOLA

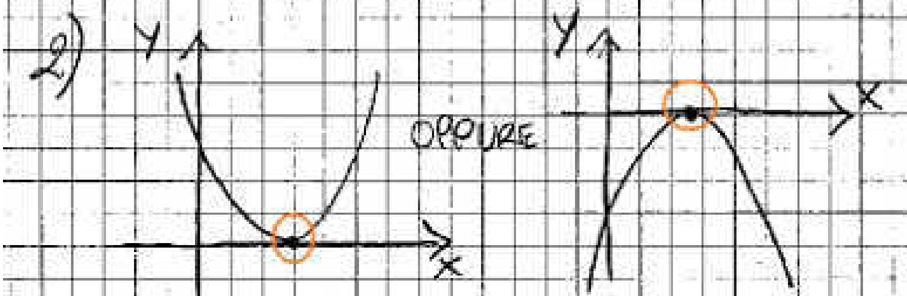
3

1)



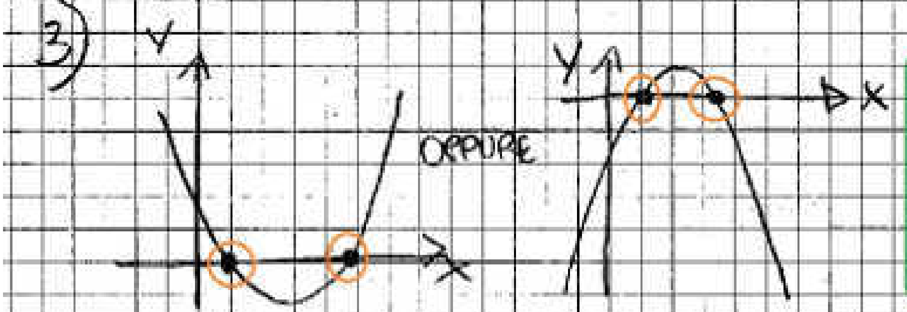
LA PARABOLA NON TOCCA L'ASSE DELLE X (ASCISSE)

2)



LA PARABOLA TOCCA L'ASSE DELLE X (ASCISSE) IN UN PUNTO

3)



LA PARABOLA TOCCA L'ASSE DELLE X (ASCISSE) IN DUE PUNTI

ANALOGAMENTE, CONSIDERANDO UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y ED UNA RETTA COINCIDENTE CON L'ASSE Y SI POSSONO AVERE LE STESSE TRE SITUAZIONI, RISPETTO PERÒ ALL'ASSE Y

RISOLVERE QUINDI, IN OGNI CASO, UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO AD UNA INCOGNITA (POLINOMIO DI 2° GRADO NEL PIANO CARTESIANO...):

$\boxed{ax^2+bx+c=0}$ $\boxed{ay^2+by+c=0}$

SIGNIFICA DETERMINARE LA POSIZIONE TRA LA PARABOLA E

ASSE X ASSE Y

FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI 2°

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

CON $a\neq 0$, ALTRIMENTI SAREBBE UN POLINOMIO DI 1° GRADO E QUINDI UNA RETTA NEL PIANO E NON UNA PARABOLA.

RISOLVERLA SIGNIFICA TROVARE LE "RADICI" (CIOÈ I VALORI DELLA X) PER I QUALI SIA VERA E DETERMINARE QUINDI LA POSIZIONE RECIPROCA TRA LA PARABOLA E L'ASSE X.

LE RADICI SI OTTENGONO MEDIANTE LA FORMULA:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

DOVE LA QUANTITÀ

$$\boxed{b^2-4ac}$$

PRENDE IL NOME DI "DELTA" E SI INDICA CON Δ.

DIMOSTRAZIONE

LA DIMOSTRAZIONE DI TALE FORMULA SI OTTIENE PARTENDO DALLA STESSA EQUAZIONE:

$$ax^2+bx+c=0$$

MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER $4a$

$$4a(ax^2+bx+c)=4a\cdot 0$$

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

SOTTRAIAMO AD ENTRAMBI I MEMBRI $4ac$

LA TEORIA SULLA PARABOLA

$$4a^2x^2 + 4abx + \cancel{4ac} - \cancel{4ac} = 0 - 4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

SOMMIAMO AD ENTRAMBI I MEMBRI b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

IL PRIMO MEMBRO È LO SVILUPPO DEL QUADRATO DI BINOMIO $(2ax+b)$, CIOÈ:

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

QUINDI

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

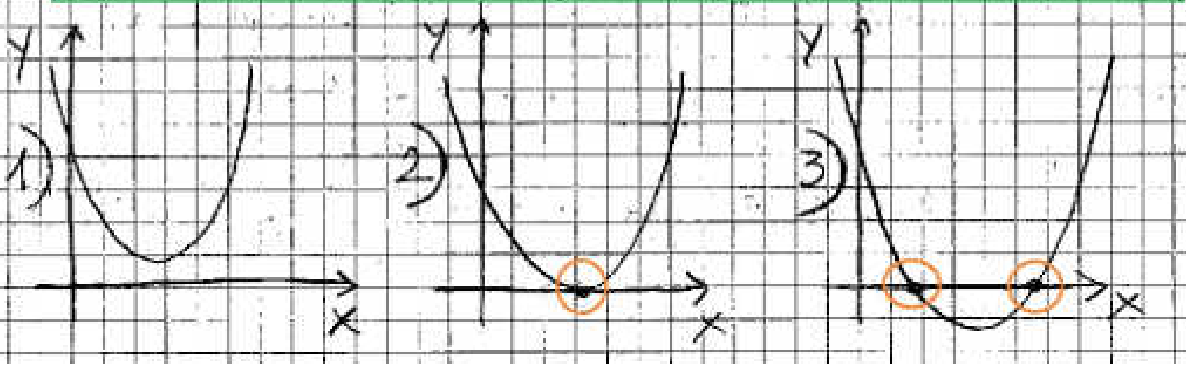
C.V.D

RETTA SECANTE, TANGENTE O ESTERNA IN BASE AL DELTA

CONSIDERANDO UNA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

ABBIAMO VISTO LE TRE DIVERSE SITUAZIONI RISPETTO ALLA POSIZIONE RECIPROCA DELLA PARABOLA E L'ASSE X.



E CIOÈ:
1) NESSUN PUNTO IN COMUNE;
2) UN PUNTO IN COMUNE;
3) DUE PUNTI IN COMUNE;

RISOLVENDO QUINDI L'EQUAZIONE DI II° GRADO AD UNA INCOGNITA:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

SIGNIFICA DETERMINARE PER QUALI VALORI DI X LA PARABOLA È UGUALE A Ø (ZERO) CIOÈ Y=0, E QUINDI QUANDO LA PARABOLA TOCCA L'ASSE X.
RIPRENDENDO QUINDI LA FORMULA RISOLUTIVA DELLA EQUAZIONE DI II° GRADO AD UNA INCOGNITA:

$$\boxed{X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

POSSIAMO VEDERE CHE IN BASE AL VALORE CHE ASSUME IL DELTA (DETTO ANCHE PER QUESTO MOTIVO "DISCRIMINANTE" CIOÈ CHE DISCRIMINA...), SI HA:

1) $\Delta < 0$ ($b^2 - 4ac < 0$) - NEGATIVO

IN QUESTO CASO NON SI PUÒ CALCOLARE LA RADICE NEI NUMERI REALI MA SOLO NEI NUMERI IMMAGINARI E SOMMANDO E SOTTRAENDO SI OTTENGONO DUE SOLUZIONI COMPLESSE (RADICI COMPLESSE E CONIUGATE) QUINDI NESSUN VALORE DI X REALE, CIOÈ NESSUN PUNTO IN COMUNE TRA LA PARABOLA E L'ASSE X.

LA TEORIA SULLA PARABOLA

2

2) $\Delta = 0$ $(b^2 - 4ac = 0)$ – NULLO

IN QUESTO CASO LA RADICE VALE Ø (ZERO) E SOMMANDO E SOTTRAENDO ZERO SI OTTENGONO DUE SOLUZIONI UGUALI (RADICI REALI E COINCIDENTI), CIOÈ UN SOLO PUNTO IN COMUNE TRA LA PARABOLA E L'ASSE X.

3) $\Delta > 0$ $(b^2 - 4ac > 0)$ – POSITIVO

IN QUESTO CASO SI PUÒ CALCOLARE LA RADICE E SOMMANDO E SOTTRAENDO SI OTTENGONO DUE SOLUZIONI DIVERSE (RADICI REALI E DISTINTE), CIOÈ DUE PUNTI IN COMUNE TRA LA PARABOLA E L'ASSE X.

IN GENERALE, CONSIDERANDO LA POSIZIONE RECIPROCA TRA UNA PARABOLA E UNA RETTA, NELLA RISOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

SI RISOLVE COMUNQUE UNA EQUAZIONE DI II° GRADO CON UNA INCOGNITA E:

1) $\Delta < 0$ – NEGATIVO

NESSUN PUNTO IN COMUNE – RETTA ESTERNA ALLA PARABOLA.

2) $\Delta = 0$ – NULLO

UN PUNTO IN COMUNE – RETTA TANGENTE ALLA PARABOLA.

3) $\Delta > 0$ – POSITIVO

DUE PUNTI IN COMUNE – RETTA SECANTE LA PARABOLA

LA TEORIA SULLA PARABOLA

RICERCA DELLE EQUAZIONI DELLE RETTE TANGENTI

A) RETTE TANGENTI CONDOTTE DA UN PUNTO ESTERNO ALLA PARABOLA:

CONSIDERIAMO LA GENERICA PARABOLA:

$$y = ax^2 + bx + c$$

E UN PUNTO

$$P_0(x_0; y_0)$$

ESTERNO AD ESSA.

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE PROPRIO DI CENTRO $P_0(x_0; y_0)$, CIOÈ

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

DA QUESTA EQUAZIONE RICAVIAMO LA y:

$$\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$$

E LA SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE DELLA PARABOLA:

$$y_0 + m(x - x_0) = ax^2 + bx + c$$

ORDINIAMO RISPETTO ALLA x:

$$y_0 + mx - mx_0 = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx - mx + mx_0 - y_0 + c = 0$$

$$\underbrace{a}_{*}x^2 + \underbrace{(b-m)}_{*}x + \underbrace{mx_0 - y_0 + c}_{*} = 0$$

OTTENENDO COSÌ UNA EQUAZIONE DI II° GRADO AD UNA INCOGNITA, I CUI COEFFICIENTI SONO LE QUANTITÀ $*$

CALCOLIAMO ALLORA IL DELTA:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (b-m)^2 - 4a(mX_0 - Y_0 + c)$$

E LO IMPONIAMO UGUALE A ZERO CHE È LA CONDIZIONE DI TANGENZA TRA RETTA E PARABOLA:

$$(b-m)^2 - 4a(mX_0 - Y_0 + c) = 0$$

SVILUPPANDO:

$$b^2 + m^2 - 2bm - 4amX_0 + 4aY_0 - 4ac = 0$$

$$\boxed{m^2 - 2(b + 2aX_0)m + b^2 + 4aY_0 - 4ac = 0}$$

SI OTTIENE UN'ALTRA EQUAZIONE DI II° GRADO NELL'UNICA INCOGNITA m.

RISOLVENDOLA OTTENIAMO I VALORI m_1 ED m_2 CHE SOSTITUITI NELL'EQUAZIONE DEL FASCIO DANNO LE EQUAZIONI DELLE RETTE TANGENTI:

$$\boxed{\begin{array}{l} Y - Y_0 = m_1(X - X_0) \\ Y - Y_0 = m_2(X - X_0) \end{array}}$$

3) RETTA TANGENTE IN UN PUNTO APPARTENENTE ALLA PARABOLA

CONSIDERIAMO UN PUNTO

$$P_0(X_0; Y_0)$$

APPARTENENTE ALLA PARABOLA

$$Y = aX^2 + bX + c$$

EFFETTUIAMO LE SEGUENTI SOSTITUZIONI.

$$x^2 = x_0 \cdot x \quad E \quad y^2 = y_0 \cdot y$$

$$x = \frac{x_0 + x}{2} \quad E \quad y = \frac{y_0 + y}{2}$$

FORMULA DI SDOPPIAMENTO

COSÌ RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA COME:

$$\boxed{\frac{y_0 + y}{2} = a \cdot x_0 \cdot x + b \cdot \frac{x_0 + x}{2} + c}$$

A QUESTO PUNTO BASTA SVILUPPARE I CALCOLI E SI OTTIENE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE NEL PUNTO $P_0(x_0; y_0)$.

C) RETTA TANGENTE CON COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE IMPROPRIO

$$\boxed{y = mx + q}$$

IN CUI m È IL COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO.

SOSTITUIAMO LA y NELL'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{mx + q = ax^2 + bx + c}$$

RIORDINIAMO RISPETTO ALLA x

$$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0$$

RICAVIAMO IL Δ E LO IMPONIAMO A ZERO (CONDIZ. DI TANG.)

$$(b - m)^2 - 4a(c - q) = 0$$

SI OTTIENE UN EQUAZIONE NELL'INCOGNITA q, LA CUI SOLUZIONE SI SOSTITUISCE NELL'EQUAZIONE $y = mx + q$, TROVANDO LA RETTA TANGENTE.

FASCIO DI PARABOLE

CONSIDERIAMO LE PARABOLE CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y (MA IL RAGIONAMENTO PUÒ ESSERE RIPETUTO PER LE PARABOLE CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE X).

SIANO P_1 E P_2 DUE PARABOLE CHE PRENDONO IL NOME DI PARABOLE GENERATRICI:

$P_1)\ y = ax^2 + bx + c \qquad P_2)\ y = a'x^2 + b'x + c'$

RISCRIVIAMO LE LORO EQUAZIONI IN FORMA IMPLICITA:

$P_1)\ y - ax^2 - bx - c = 0 \qquad P_2)\ y - a'x^2 - b'x - c' = 0$

E CONSIDERIAMO UNA COMBINAZIONE LINEARE★ DELLE DUE EQUAZIONI, DEL TIPO $P_1 + kP_2 = 0$, CIOÈ:

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0$$

CON $k \in \mathbb{R}$, PARAMETRO REALE.

★ UNA COMBINAZIONE LINEARE È UNA ESPRESSIONE DI I° GRADO IN CUI COMPAIONO SOMME DI ELEMENTI NON SCALARI (IN QUESTO CASO POLINOMI...), GLI STESSI MOLTIPLICATI PER SCALARI (K...).

OTTENIAMO QUINDI L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI PARABOLE GENERATO DA P_1 E P_2, DALLA QUALE AL VARIARE DI K SI OTTENGONO INFINITE PARABOLE.

SE P_1 E P_2 HANNO DUE PUNTI IN COMUNE, ALLORA TUTTE LE PARABOLE DEL FASCIO PASSANO PER TALI PUNTI, DETTI PUNTI BASE VISTO CHE LE LORO COORDINATE VERIFICANO

L'EQUAZIONE DEL FASCIO PER QUALSIASI VALORE DEL PARAMETRO K.

ANALOGAMENTE SE P_1 E P_2 HANNO UN SOLO PUNTO IN COMUNE, VI SARÀ UN SOLO PUNTO BASE, MENTRE SE NON HANNO PUNTI IN COMUNE NON ESISTONO PUNTI BASE.

LA GENERATRICE P_1 SI OTTIENE DALL'EQUAZIONE DEL FASCIO PRECEDENTE PER K=0 MENTRE LA P_2 NON SI OTTIENE PER ALCUN VALORE DI K.

PER DETERMINARE GLI EVENTUALI PUNTI BASE BASTA METTERE A SISTEMA LE EQUAZIONI P_1 E P_2.

SVILUPPANDO I CALCOLI, L'EQUAZIONE DEL FASCIO PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$\boxed{(1+k)y-(a+ka')x^2-(b+kb')x-(c+kc')=0}$$

IN QUESTO CASO SE

$$1+k=0 \quad E \quad a+ka'=0$$

CIOÈ SE

$$k=-1 \quad E \quad k=-\frac{a}{a'}$$

SI OTTENGONO LE PARABOLE DEGENERI DEL FASCIO, CIOÈ DELLE RETTE.

MOLTO SPESSO UN FASCIO DI PARABOLE CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y VIENE ASSEGNATO MEDIANTE UNA EQUAZIONE DEL TIPO:

$$\boxed{y=(a+ka')x^2+(b+kb')x+c+kc'}$$

IN QUESTO CASO LE PARABOLE DEGENERI SI OTTENGONO

LA TEORIA SULLA PARABOLA

PONENDO SEMPLICEMENTE

$$a + k a' = 0$$

E CIOÈ

$$k = -\frac{a}{a'}$$

MENTRE SVILUPPANDO I CALCOLI E RISCRIVENDO LA EQUAZIONE COME:

$$y = k(a'x^2 + b'x + c') + ax^2 + bx + c$$

LE ASCISSE DEGLI EVENTUALI PUNTI BASE DEL FASCIO SI OTTENGONO MEDIANTE L'EQUAZIONE:

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

E LE ORDINATE, SOSTITUENDO TALI ASCISSE NELLA EQUAZIONE DEL FASCIO CON K=0.

ESEMPI

SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y:

1) NOTI: $A(0;-6)$ $B(6;0)$ $C(1;0)$

$$\begin{cases} -6 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 0 = a\cdot(6)^2 + b\cdot 6 + c \\ 0 = a\cdot(1)^2 + b\cdot 1 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -6 \\ 36a + 6b - 6 = 0 \\ a + b - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -6 \\ 36(6-b) + 6b - 6 = 0 \\ a = 6 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -6 \\ 216 - 36b + 6b - 6 = 0 \\ a = 6 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-6 \\ 30b=210 \\ a=6-b \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} c=-6 \\ b=\frac{210}{30}=7 \\ a=6-7=-1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=7 \\ c=-6 \end{cases}$$

QUINDI L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA SARÀ:

$$\boxed{y=-x^2+7x-6}$$

2) NOTI IL FUOCO $F(2;1)$ E DIRETTRICE $y+3=0$

APPLICHIAMO LA FORMULA:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|y+3|$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(y+3)^2$$

$$x^2-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{y^2}+6y+9$$

$$x^2-4x+5-9=6y+2y$$

$$8y=x^2-4x-4$$

$$\boxed{y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$

SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE X:

3) NOTI $A(4;0)$ $B(1;1)$ $C\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} 4=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ 1=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ \frac{1}{4}=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=-b-3 \\ \frac{1}{4}=\frac{1}{4}(-b-3)+\frac{1}{2}b+4 \end{cases}$$

⑥

$$\begin{cases} c=4 \\ a=-b-3 \\ \frac{1}{2}b-\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=-b-3 \\ \frac{2b-b}{\cancel{4}}=\frac{1+3-16}{\cancel{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=4 \\ a=-b-3 \\ b=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-12 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=9y^2-12y+4}$$

4) NOTI IL FUOCO $F\left(\frac{19}{4};3\right)$ E DIRETTRICE $4x-21=0$

APPLICHIAMO LA FORMULA

$$\left(x-\frac{19}{4}\right)^2+(y-3)^2=\left(x-\frac{21}{4}\right)^2$$

$$x^2-\frac{19}{2}x+\frac{361}{16}+y^2-6y+9=x^2-\frac{21}{2}x+\frac{441}{16}$$

$$-\frac{19}{2}x+\frac{21}{2}x=-y^2-6y+\frac{441}{16}-\frac{361}{16}-9$$

$$x=-y^2-6y+\frac{80}{16}-9$$

$$\boxed{x=-y^2-6y-4}$$

5) DETERMINARE IL VALORE DEL PARAMETRO "K" IN MODO CHE LA PARABOLA

$$2(k-1)y+x^2=0$$

ABBIA PER DIRETTRICE LA RETTA $y=-\frac{1}{2}$

SAPPIAMO CHE IN GENERALE L'EQUAZIONE DELLA DIRETTRICE È:

$$y=\frac{-1-\Delta}{4a}$$

ESPRESSIONE CHE UGUAGLIAMO ALLA DIRETTRICE DATA:

$$-\frac{1}{2}=\frac{-1-\Delta}{4a}$$

RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA COME:

$$y=-\frac{1}{2(k-1)}x^2$$

DA CUI SI NOTA CHE IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI I° GRADO X E IL TERMINE NOTO SONO ENTRAMBI NULLI, CIOÈ:

$$\Delta=b^2-4ac \quad \text{CON } b=0 \text{ E } c=0 \Rightarrow \Delta=0$$

COSì:

$$-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4a}$$

$$-4a=-2$$

$$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

MA DALL'EQUAZIONE ESPLICITA DELLA PARABOLA

$$a=-\frac{1}{2(k-1)}$$

COSì

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2(k-1)}$$

$$2(k-1)=-2$$

$$2k=\cancel{-2}+\cancel{2}$$

$$2k=0$$

$$\boxed{k=0}$$

6) DETERMINARE IL VALORE DEL PARAMETRO "a" IN MODO CHE LA PARABOLA DI EQUAZIONE

$$y = ax^2$$

ABBIA IL FUOCO NEL PUNTO $F\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

SAPPIAMO CHE LE COORDINATE GENERICHE DEL FUOCO SONO:

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

UGUAGLIAMO LE ORDINATE

$$\frac{1-\Delta}{4a} = -\frac{1}{3}$$

VISTO CHE I COEFFICIENTI b e c SONO NULLI, ALLORA $\Delta = \cancel{b^2} - \cancel{4ac} = 0$ COSÌ:

$$\frac{1}{4a} = -\frac{1}{3}$$

$$3 = -4a$$

$$\boxed{a = -\frac{3}{4}}$$

7) DETERMINARE IL VERTICE, IL FUOCO, LA DIRETRICE E L'ASSE DI SIMMETRIA DELLA PARABOLA:

$$y = x^2 - 4x + 2 \qquad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 = 8$$

$$\boxed{V}\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}; \frac{-8}{4}\right) = \boxed{(2; -2)}$$

$$\boxed{F}\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(2; \frac{1-8}{4}\right) = \boxed{\left(2; -\frac{7}{4}\right)}$$

DIRETTRICE:

$$\boxed{y = \frac{-1-\Delta}{4a} = \frac{-1-8}{4} = -\frac{9}{4}}$$

ASSE:

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a} = 2}$$

8) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y, CHE HA IL FUOCO NEL PUNTO $F(1;3)$ E IL VERTICE NEL PUNTO $V(1;6)$

SCRIVIAMO LE COORDINATE GENERICHE DEL FUOCO E DEL VERTICE:

$$F\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{1-\Delta}{4a}\right) \qquad V\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

EGUAGLIAMO LE COORDINATE ED OTTENIAMO 3 EQUAZIONI CHE MESSE A SISTEMA CI FORNIRANNO I 3 COEFFICIENTI a, b E c DELLA PARABOLA:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = 3 \\ \dfrac{-\Delta}{4a} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2a \\ 1-\Delta = 12a \\ \Delta = -24a \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2a \\ 1+24a = 12a \\ \Delta = -24a \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2a \\ 12a = -1 \\ \Delta = -24a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{6} \\ a = -\dfrac{1}{12} \\ \circledast\ \Delta = -24\cdot\left(-\dfrac{1}{12}\right) \end{cases}$$

$$\circledast\ b^2 - 4ac = +2 \Rightarrow -4ac = 2 - b^2$$

$$4ac = b^2 - 2 \Rightarrow c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2}{4a}$$

$$c = \frac{\frac{1}{36}}{-\frac{4}{12}} - \frac{2}{-\frac{4}{12}} = \frac{1}{36}\cdot\left(-\frac{12}{4}\right) - 2\cdot\left(-\frac{12}{4}\right) =$$

$$c = -\frac{1}{12} + 6 = \frac{-1+72}{12} = +\frac{71}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{71}{12}}$$

(7)

9) SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y, PASSANTE PER L'ORIGINE E AVENTE VERTICE NEL PUNTO $V(2;-4)$.

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases} 0=\cancel{a\cdot 0^2}+\cancel{b\cdot 0}+c & \text{PASSAGGIO PER L'ORIGINE} \\ -4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+\cancel{c} & \text{PASSAGGIO PER IL VERTICE} \\ -\dfrac{b}{2a}=2 & \text{ASCISSA DEL VERTICE} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=0 \\ 4a=-4-2b \\ -b=4a \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ 4a=-4-2b \\ b=-(-4-2b)=4+2b \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ 4a=-4-2b \\ b=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=0 \\ 4a=-4-2(-4) \\ b=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=x^2-4x}$$

10) TRACCIARE UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE Y IN MODO CHE LA CORDA INTERCETTATA DALLA PARABOLA

$$y^2=3x-4$$

MISURI 2.

$$\begin{cases} x=k & \text{RETTA PARALLELA ALL'ASSE Y} \\ y^2=3x-4 & \text{PARABOLA} \end{cases}$$

$$y^2=3k-4 \qquad y=\pm\sqrt{3k-4}$$

$A\left(k;+\sqrt{3k-4}\right)$ E $B\left(k;-\sqrt{3k-4}\right)$ PUNTI DI INTERSEZIONE TRA RETTA E PARABOLA

$\overline{AB}=2$ LA DISTANZA TRA I DUE PUNTI DEVE ESSERE 2

LA TEORIA SULLA PARABOLA

$$\sqrt{(k-k)^2+\left(\sqrt{3k-4}+\sqrt{3k-4}\right)^2}=2$$

$$\left(\sqrt{3k-4}+\sqrt{3k-4}\right)^2=4$$

$$3k-4+2(3k-4)+3k-4=4$$

$$3k-4+6k-8+3k-4=4$$

$$12k=20$$

$$\boxed{k=\frac{\cancel{20}^{\,5}}{\cancel{12}_{\,3}}}$$

11) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE ALLA PARABOLA

$$y=x^2-4x$$

NEL PUNTO $A(1;-3)$

VERIFICHIAMO CHE

$$-3=1^2-4\cdot 1$$

$$-3=-3$$

QUINDI IL PUNTO APPARTIENE ALLA PARABOLA, COSÌ:

$$\frac{y_0+y}{2}=a\,x_0\,x+b\cdot\frac{x_0+x}{2}+c$$

CIOÈ

$$\frac{-3+y}{2}=1\cdot 1\cdot x+(-4)\cdot\frac{1+x}{2}+0$$

$$\frac{-3+y}{2}=x-\frac{4+4x}{2}$$

$$\frac{-3+y}{2}=\frac{2x-4-4x}{2}$$

$$-3+y=2x-4-4x$$

$$\boxed{2x+y+1=0}$$

12) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLE RETTE TANGENTI ALLA PARABOLA $y=2x^2-5x+1$ CONDOTTE DAL PUNTO $P(-1;0)$

ESSENDO P ESTERNO ALLORA CONSIDERIAMO

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

CIOÈ

$$y-0=m(x+1)$$

$$y=m(x+1)$$

SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

$$m(x+1)=2x^2-5x+1$$

COSì:

$$mx+m=2x^2-5x+1$$

$$2x^2-5x+1-mx-m=0$$

$$2x^2-(5+m)x+(1-m)=0$$

CALCOLIAMO IL Δ E LO IMPONIAMO A ZERO (CONDIZIONE DI TANGENZA):

$$\left[-(5+m)\right]^2-4\cdot 2\cdot(1-m)=0$$

$$25+10m+m^2-8+8m=0$$

$$m^2+18m+17=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{324-68}}{2}=\frac{-18\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{-18\pm16}{2}=\begin{cases}\frac{-34}{2}=-17\\[4pt]\frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

QUINDI LE RETTE TANGENTI SONO:

$$y=-17(x+1)\qquad \boxed{y=-17x-17\qquad 17x+y+17=0}$$

$$y=-1\cdot(x+1)\qquad \boxed{y=-x-1\qquad x+y+1=0}$$

13) DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y, TANGENTE ALLA RETTA $y=5x-15$ NEL PUNTO $A(4;5)$ E CHE PASSA PER IL PUNTO $B(3;1)$.

$$y=ax^2+bx+c$$

$y=5x-15$ $\quad A(4,5)$ $\quad B(3;1)$

CONDIZIONE DI TANGENZA:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=5x-15 \end{cases} \Rightarrow 5x-15=ax^2+bx+c$$

$$ax^2+(b-5)x+c+15=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (b-5)^2-4a(c+15)=0$$

COSÌ

$$\begin{cases} 4^2a+4b+c=5 & \text{PASSAGGIO PER } A \\ 3^2a+3b+c=1 & \text{PASSAGGIO PER } B \\ (b-5)^2-4a(c+15)=0 & \text{CONDIZIONE DI TANGENZA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-16a-4b+5 \\ 9a+3b-16a-4b+5=1 \\ (b-5)^2-4a(c+15)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-16a-4b+5 \\ -7a-b+4=0 \\ (b-5)^2-4a(c+15)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-16a-4(-7a+4)+5 \\ b=-7a+4 \\ (b-5)^2-4a(c+15)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=12a-11 \\ b=-7a+4 \\ (-7a-1)^2-4a(12a+4)=0 \end{cases}$$

$$49a^2+14a+1-48a^2-16a=0$$

$$a^2-2a+1=0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=x^2-3x+1}$$

(8)

1/1) DATA L'EQUAZIONE DEL SEGUENTE FASCIO DI PARABOLE

$$(k+1)y+(k-2)x^2+6x+k-2=0$$

DETERMINARE EVENTUALI PUNTI BASE, NEL CASO DI UN SOLO PUNTO BASE SE C'È UNA TANGENTE COMUNE E EVENTUALI PARABOLE DEGENERI

RICAVIAMO LE DUE PARABOLE GENERATRICI:

$$ky+y+kx^2-2x^2+6x+k-2=0$$

$$y-2x^2+6x-2+ky+kx^2+k=0$$

$$y-2x^2+6x-2+k(y+x^2+1)=0$$

LE PONIAMO A SISTEMA E DETERMINIAMO I PUNTI BASE:

$$\begin{cases} y-2x^2+6x-2=0 \\ y+x^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x^2-6x+2 \\ y=-x^2-1 \end{cases}$$

$$2x^2-6x+2+x^2+1=0$$

$$3x^2-6x+3=0$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\cancel{\sqrt{4-4}}}{2}=\frac{2}{2}=1 \quad y=-2 \Rightarrow \boxed{P(1;-2) \text{ PUNTO BASE}}$$

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL FASCIO IN FORMA ESPLICITA

$$y=-\frac{k-2}{k+1}x^2-\frac{6}{k+1}x+\frac{2-k}{k+1} \quad \text{IN CUI } a=-\frac{k-2}{k+1};\ b=-\frac{6}{k+1};\ c=\frac{2-k}{k+1}$$

DETERMINIAMO ALLORA, SE ESISTE, LA RETTA TANGENTE AL FASCIO NEL PUNTO $P(1;2)$, (VEDI RETTA TANGENTE ALLA PARABOLA IN UN PUNTO), CIOÈ:

$$\frac{-2+y}{2}=-\frac{k-2}{k+1}\cdot 1\cdot x+\left(-\frac{6}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{2}\right)+\frac{2-k}{k+1}$$

$$\frac{-2+y}{2}+\frac{kx-2x}{k+1}+\frac{6+6x}{2(k+1)}-\frac{2-k}{k+1}=0$$

$$\frac{(k+1)(-2+y)+(kx-2x)2+6+6x-2(2-k)}{\cancel{2(k+1)}}=0$$

$$\cancel{-2k}+ky\cancel{-2}+y+2kx-4x\cancel{+6}+6x\cancel{-4}\cancel{+2k}=0$$

$$y+ky+2x+2kx=0$$

$$\cancel{(1+k)}y+2\cancel{(1+k)}x=0$$

$\boxed{y=-2x}$ TANGENTE IN COMUNE

EVENTUALI PARABOLE DEGENERI:

$\boxed{k=-1}$ $\cancel{(-1+1)}y+(-1-2)x^2+6x-1-2=0$

$$-3x^2+6x-3=0$$

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$ PARABOLA DEGENERE (RETTA)

$\boxed{k=2}$ $(2+1)y+\cancel{(2-2)x^2}+6x\cancel{+2}\cancel{-2}=0$

$$3y+6x=0$$

$\boxed{y=-2x}$ PARABOLA DEGENERE (RETTA)

15) DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL FASCIO DI PARABOLE CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y, TANGENTI ALLA RETTA $y=x-3$ NEL PUNTO DI ASCISSA 1. DETERMINARE LA PARABOLA AVENTE IL VERTICE APPARTENENTE ALLA RETTA $4x-4y-11=0$.

DETERMINIAMO L'ORDINATA DEL PUNTO DI ASCISSA 1: $y=1-3=-2$

CONSIDERANDO LA GENERICA PARABOLA $y=ax^2+bx+c$:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=x-3 \end{cases} \Rightarrow ax^2+bx+c-x+3=0 \Rightarrow ax^2+(b-1)x+c+3=0$$

$$\Delta=(b-1)^2-4a(c+3)=0$$

COSÌ:

$$\begin{cases} -2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c & \text{PASSAGGIO PER IL PUNTO } (1;-2) \\ (b-1)^2-4a(c+3)=0 & \text{CONDIZIONE DI TANGENZA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-3 \\ b=1-2a \end{cases}$$

SE INDICHIAMO $a=k$, ALLORA:

$$\boxed{y = kx^2 - (2k-1)x + k - 3} \quad \text{EQ. DEL FASCIO}$$

CONSIDERIAMO LE COORDINATE GENERICHE DEL VERTICE:

$$V\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

E LE RISCRIVIAMO SAPENDO CHE DAL FASCIO ABBIAMO:

$$a = k \qquad b = -(2k-1) \qquad c = k-3$$

E:

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(2k-1)]^2 - 4 \cdot k \cdot (k-3) = \cancel{4k^2} - 4k + 1 - \cancel{4k^2} + 12k = 8k + 1$$

COSÌ LE COORDINATE DEL VERTICE SONO:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(2k-1)}{2k} = \frac{2k-1}{2k}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-8k-1}{4k}$$

E IMPONIAMO L'APPARTENENZA DEL VERTICE ALLA RETTA

$$4x - 4y - 11 = 0$$

CIOÈ

$$\cancel{4}^{2}\left(\frac{2k-1}{\cancel{2}k}\right) - \cancel{4}\left(\frac{-8k-1}{\cancel{4}k}\right) - 11 = 0$$

$$\frac{4k-2}{k} - \frac{-8k-1}{k} - 11 = 0$$

$$\frac{4k - 2 + 8k + 1 - 11k}{\cancel{k}} = 0$$

$$k - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

SOSTITUISCO K NEL FASCIO ED OTTENGO L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON VERTICE SULLA RETTA $4x - 4y - 11 = 0$, CIOÈ:

$$y = 1 \cdot x^2 - (2 \cdot 1 - 1)x + 1 - 3$$

$$\boxed{y = x^2 - x - 2}$$

16) DETERMINARE IL FASCIO DI PARABOLE CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE Y PASSANTI PER $A(2;2)$ E $B(3;0)$ E DETERMINARE LA PARABOLA:
a) PASSANTE PER L'ORIGINE
b) TANGENTE ALLA RETTA $Y=X-4$
c) AVENTE PER ASSE LA RETTA $X=2$

DETERMINIAMO IL FASCIO, IMPONENDO IL PASSAGGIO DELLA GENERICA PARABOLA PER I DUE PUNTI:

$$\begin{cases} 2=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c & \text{PASSAGGIO PER } A \\ 0=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c & \text{PASSAGGIO PER } B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-5a-2 \\ c=6a+6 \end{cases} \Rightarrow \text{SE } a=k$$

$$y=kx^2+(-5k-2)x+6k+6 \quad \text{FASCIO PARABOLE PASSANTI PER } A \text{ E } B$$

a) IMPONIAMO IL PASSAGGIO PER L'ORIGINE

$$0=k\cancel{0^2}+\cancel{(-5k-2)0}+6k+6 \Rightarrow 6k=-6 \Rightarrow k=-1$$

COSÌ:

$$y=(-1)\cdot x^2+[-5\cdot(-1)-2]\cdot x+6(-1)+6 \Rightarrow \boxed{y=-x^2+3x \quad \text{PARABOLA PASSANTE PER L'ORIGINE}}$$

b)
$$\begin{cases} y=kx^2+(-5k-2)x+6k+6 \\ y=x-4 \\ \Delta=0 \end{cases} \quad kx^2+(-5k-2)x+6k+6=x-4 \Rightarrow kx^2+(-5k-3)x+6k+10=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (-5k-3)^2-4k(6k+10)=0 \Rightarrow k^2-10k+9=0$$

$$k=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\begin{cases} k_1=1 \\ k_2=9 \end{cases}$$

$$y=(1)\cdot x^2+[-5(1)-2]x+6(1)+6 \Rightarrow y=x^2-7x+12$$
$$y=(9)\cdot x^2+[-5(9)-2]x+6(9)+6 \Rightarrow y=9x^2-47x+60$$

PARABOLE TANGENTI ALLA RETTA $Y=X-4$

c) IN GENERALE L'EQ. DELL'ASSE È $x=-\frac{b}{2a}$
MA $a=k$ E $b=(-5k-2)$ E $x=2$, COSÌ

$$-\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow -\frac{-5k-2}{2k}=2 \Rightarrow 5k+2=4k \Rightarrow \boxed{k=-2}$$

QUINDI

$$y=(-2)x^2+[-5(-2)-2]x+6(-2)+6 \Rightarrow \boxed{y=-2x^2+8x-6 \quad \text{PARABOLA CON ASSE } X=2}$$