SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

UN METODO DI SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI È QUELLO CHE SI AVVALE DELLA REGOLA DI RUFFINI.
SAPPIAMO CHE CON TALE REGOLA È POSSIBILE EFFETTUARE LA DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN BINOMIO DI PRIMO GRADO IN MODO CHE POSSIAMO SCRIVERE

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R$$

DOVE

$P(x)$ POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO m
$D(x)$ POLINOMIO DIVISORE DI GRADO 1
$Q(x)$ POLINOMIO QUOZIENTE DI GRADO $m-1$
R UN NUMERO

E SE IL DIVIDENDO È DIVISIBILE PER IL DIVISORE LA DIVISIONE SARÀ ESATTA ED IL RESTO SARÀ ZERO, CIOÈ $R=0$.
QUINDI SE ABBIAMO UN POLINOMIO CHE NON È SCOMPONIBILE MEDIANTE I METODI TRADIZIONALI COME AD ESEMPIO I PRODOTTI NOTEVOLI, BASTA TROVARE UN BINOMIO DI 1° GRADO PER IL QUALE È DIVISIBILE E RISCRIVERLO SCOMPOSTO MEDIANTE LA REGOLA DI RUFFINI.
PER TROVARE TALE BINOMIO CI AVVALIAMO DELLA REGOLA DELL'ALGEBRA SECONDO LA QUALE PER UN POLINOMIO DI GRADO m, LE EVENTUALI RADICI (CIOÈ QUEI VALORI CHE SOSTITUITI ALLA SUA VARIABILE LO RENDONO

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

NULLO, CIOÈ UGUALE A ZERO) SE ESISTONO SONO DA RICERCARE NELLA FRAZIONE:

$$\frac{p}{q}$$

DOVE

p È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL TERMINE NOTO

E

q È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO

QUESTA REGOLA È CONOSCIUTA CON IL NOME DI TEOREMA DELLE RADICI RAZIONALI.

CONSIDERIAMO AD $\boxed{\text{ESEMPIO}}$ IL POLINOMIO:

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

IN CUI

TERMINE NOTO $+3$

COEFFICIENTE TERMINE GRADO MASSIMO $+2$

QUINDI

DIVISORI DI $+3$ SONO $-1; +1; -3; +3$

DIVISORI DI $+2$ SONO $-1; +1; -2; +2$

COSÌ <u>SE ESISTONO</u> LE RADICI RAZIONALI DEL POLINOMIO VANNO CERCATE TRA

$$\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm 3; \pm\frac{3}{2}\right\}$$

SOSTITUIAMO TALI VALORI AL POSTO DELLA X NEL POLINOMIO E VEDIAMO QUALE VALORE LO ANNULLA CIOÈ LO RENDE UGUALE A ZERO.

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

$$P(-1)=2(-1)^4+5(-1)^3-5(-1)^2-5(-1)+3=$$
$$=2-5-\cancel{5}+\cancel{5}+3=-\cancel{3}+\cancel{3}=0 \quad \text{È RADICE}$$

A QUESTO PUNTO VISTO CHE ABBIAMO TROVATO LA RADICE CI POSSIAMO FERMARE NELLA RICERCA, E SCRIVIAMO IL BINOMIO DI 1° GRADO CHE UTILIZZEREMO NELLA REGOLA DI RUFFINI, CIOÈ:

$$(x - \text{radice}) = (x-(-1))$$

QUINDI:

$$(x+1)$$

SCOMPONIAMO ALLORA IL POLINOMIO $P(x)$ EFFETTUANDO LA DIVISIONE CON LA REGOLA DI RUFFINI:

$$(2x^4+5x^3-5x^2-5x+3):(x+1)$$

VISTO CHE IL POLINOMIO È GIÀ COMPLETO ED ORDINATO IMPOSTIAMO LA TABELLA ED ESEGUIAMO LA DIVISIONE:

	+2	+5	−5	−5	+3
−1		−2	−3	+8	−3
	+2	+3	−8	+3	0

$R=0$ PERCHÉ COME SAPPIAMO $(x+1)$ È DIVISORE DI $P(x)$

MENTRE
$$Q(x)=2x^3+3x^2-8x+3$$

COSÌ SE
$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R$$

ALLORA
$$P(x)=(x+1)(2x^3+3x^2-8x+3)$$

ASSUMENDO ADESSO IL POLINOMIO QUOZIENTE COME IL

NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE

$$2x^3+3x^2-8x+3$$

RIPETIAMO IL PROCEDIMENTO PARTENDO DALLA RICERCA DI SUOI EVENTUALI ZERI, CIOÈ

TERMINE NOTO $+3$

COEFFICIENTE TERMINE DI GRADO MASSIMO $+2$

QUINDI

DIVISORI DI $+3$ SONO $-1; +1; -3; +3$

DIVISORI DI $+2$ SONO $-1; +1; -2; +2$

COSÌ LE EVENTUALI RADICI VANNO CERCATE TRA

$$\left\{\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm 3;\ \pm\frac{3}{2}\right\}$$

LI SOSTITUIAMO UNO AD UNO NEL NUOVO POLINOMIO AL POSTO DELLA X E VEDIAMO QUALE LO ANNULLA:

$$P(-1)=2(-1)^3+3(-1)^2-8(-1)+3=$$
$$=-2+3+8+3=12$$ NON È RADICE

$$P(1)=2(1)^3+3(1)^2-8(1)+3=$$
$$=2+3-8+3=0$$ È RADICE

SCRIVIAMO IL BINOMIO DI 1° GRADO

$$(x-\text{radice})=(x-1)$$

E PROCEDIAMO NUOVAMENTE A CALCOLARE MEDIANTE LA REGOLA DI RUFFINI LA DIVISIONE:

$$(2x^3+3x^2-8x+3):(x-1)$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

IL POLINOMIO È GIÀ ORDINATO E COMPLETO, COSÌ

	+2	+3	-8	+3
+1		+2	+5	-3
	+2	+5	-3	0

COSÌ

$$\left(2x^3+3x^2-8x+3\right)=\left(x-1\right)\left(2x^2+5x-3\right)$$

QUINDI RITORNANDO AL POLINOMIO DI PARTENZA AVREMO:

$$P(x)=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(2x^2+5x-3\right)$$

ASSUMIAMO ADESSO COME NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE

$$2x^2+5x-3$$

E RIPETIAMO IL PROCEDIMENTO.

DIVISORI TERMINE NOTO $\pm 1 ; \pm 3$

DIVISORI COEFFICIENTE DI GRADO MASSIMO $\pm 1 ; \pm 2$

QUINDI LE POSSIBILI RADICI SONO:

$$\left\{\pm 1 ; \pm \frac{1}{2} ; \pm 3 ; \pm \frac{3}{2}\right\}$$

VERIFICHIAMO QUALE È RADICE DEL NUOVO POLINOMIO CIOÈ CHE LO ANNULLA:

$$P(-1)=2\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)-3=2-5-3=-6$$ NON È RADICE

$$P(1)=2\cdot(1)^2+5\cdot(1)-3=2+5-3=+4$$ NON È RADICE

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3=\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{4}_2}\right)-\frac{5}{2}-3=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-3=\frac{1-5-6}{2}=-\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}=-5$$ NON È RADICE

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

$$P\left(+\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}\right)-3=\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{4}_2}\right)+\frac{5}{2}-3=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3=\frac{1+5-6}{2}=0$$ È RADICE

COSÌ IL NUOVO BINOMIO DI 1° GRADO SARÀ

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

E LA NUOVA DIVISIONE DA SVOLGERE CON RUFFINI SARÀ:

$$\left(2x^2+5x-3\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

I POLINOMI SONO COMPLETI ED ORDINATI, ALLORA:

	$+2$	$+5$	-3
$+\frac{1}{2}$		$+1$	$+3$
	$+2$	$+6$	0

COSÌ

$$\left(2x^2+5x-3\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+6\right)$$

E RITORNANDO ANCORA AL POLINOMIO DI PARTENZA AVREMO:

$$P(x)=(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+6)$$

E VOLENDOLO SCRIVERE CON RADICI INTERE, BASTA MOLTIPLICARE TUTTO PER $\frac{2}{2}$ CHE SAPPIAMO ESSERE UGUALE AD 1 CHE È L'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO, CIOÈ:

$$P(x)\cdot\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{2}_1}=P(x)$$

MA:

$$(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1}{\cancel{2}_1}\right)\left(\cancel{2}^1x+\cancel{6}^3\right)\cdot\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{2}_1}$$

OTTENENDO CHE

$$P(x)=(x+1)(x-1)(2x-1)(x+3)$$

IN CONCLUSIONE, IL POLINOMIO DI PARTENZA

$$2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$$

LO POSSIAMO SCRIVERE SCOMPOSTO COME

$$(x+1)(x-1)(2x-1)(x+3)$$

E CIOÈ

$$\boxed{(2x^4+5x^3-5x^2-5x+3)=(x+1)(x-1)(2x-1)(x+3)}$$

OSSERVAZIONE:

LA RICERCA DEGLI ZERI DEL POLINOMIO È LA PARTE PIÙ LABORIOSA DELLA REGOLA DI RUFFINI PERCHÉ IL POLINOMIO POTREBBE NON AVERE RADICI E QUINDI NON ESSERE SCOMPONIBILE, COME NEL CASO DELLA SOMMA DI QUADRATI, AD ESEMPIO

$$x^2+4$$

OPPURE POTREBBE AVERE RADICI NON RAZIONALI COME AD ESEMPIO

$$x^2-2$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

ESEMPIO 2

SCOMPORRE IL SEGUENTE POLINOMIO MEDIANTE LA REGOLA DI RUFFINI:

$$x^3-5x^2-4x+20$$

DIVISORI TERMINE NOTO

$\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20$

$P(-1)=(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+20=$

$=-1-5+4+20=+18$ NON È RADICE

$P(1)=(1)^3-5(1)^2-4(1)+20=$

$=1-5-4+20=+12$ NON È RADICE

$P(-2)=(-2)^3-5(-2)^2-4(-2)+20=$

$=-8-20+8+20=0$ È RADICE

QUINDI SVOLGIAMO

$$(x^3-5x^2-4x+20):(x+2)$$

	1	-5	-4	+20
-2		-2	+14	-20
	1	-7	+10	0

ALLORA $(x^3-5x^2-4x+20)=(x+2)(x^2-7x+10)$

SCOMPONIAMO ADESSO

$$x^2-7x+10$$

DIVISORI TERMINE NOTO

$\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$

$P(-1)=(-1)^2-7(-1)+10=1+14+10=25$ NON È RADICE

$P(1)=(1)^2-7(1)+10=1-7+10=+4$ "

$P(-2)=(-2)^2-7(-2)+10=4+14+10=28$ "

$P(2)=(2)^2-7(2)+10=4-14+10=0$ È RADICE

QUINDI SVOLGIAMO

$$(x^2-7x+10):(x-2)$$

	1	−7	+10
+2		+2	−10
	1	−5	0

ALLORA

$$(x^2-7x+10)=(x-2)(x-5)$$

QUINDI IN CONCLUSIONE IL POLINOMIO DI PARTENZA LO POSSIAMO SCOMPORRE COME:

$$\boxed{x^3-5x^2-4x+20=(x+2)(x-2)(x-5)}$$