SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

UN POLINOMIO DI QUALSIASI GRADO PUÒ ESSERE SCOMPOSTO NEL PRODOTTO DI PIÙ POLINOMI DI GRADO INFERIORE MEDIANTE LA DIVISIONE DEL POLINOMIO PER UN BINOMIO DI 1° GRADO, CHE SIA SUO DIVISORE, CIOÈ CHE NELLA DIVISIONE NON DIA RESTO IN MODO CHE POSSIAMO SCRIVERE

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x)$$

DOVE

$P(x)$ POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO m

$D(x)$ POLINOMIO DIVISORE DI GRADO 1

$Q(x)$ POLINOMIO QUOZIENTE DI GRADO $m-1$

PER TROVARE IL BINOMIO DI 1° GRADO DIVISORE SFRUTTIAMO IL TEOREMA DELLE RADICI RAZIONALI, SECONDO IL QUALE PER UN POLINOMIO DI GRADO m LE EVENTUALI RADICI (CIOÈ QUEI VALORI CHE SOSTITUITI ALLA SUA VARIABILE LO RENDONO NULLO, OSSIA UGUALE A ZERO) SE ESISTONO SONO DA RICERCARE NELLA FRAZIONE:

$$\frac{p}{q}$$

DOVE

p È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL TERMINE NOTO

E

q È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO

UNA VOLTA DETERMINATA LA RADICE DEL POLINOMIO IL BINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO SARÀ:

$$(x - \text{radice})$$

ESEMPIO 1

SCOMPONIAMO IL POLINOMIO

$$P(x) = x^5 - x - 2x^4 + 2$$

TERMINE NOTO $+2$ (DIVISORI $\pm 1; \pm 2$)

COEFFICIENTE TERMINE GRADO MASSIMO $+1$ (DIVISORI ± 1)

QUINDI SE ESISTONO LE RADICI RAZIONALI DEL POLINOMIO VANNO CERCATE TRA

$$\{\pm 1; \pm 2\}$$

COSÌ:

$$P(-1) = (-1)^5 - (-1) - 2(-1)^4 + 2 =$$
$$= \cancel{-1} + \cancel{1} \cancel{-2} + \cancel{2} = 0$$

-1 È RADICE

ORDINIAMO E COMPLETIAMO IL POLINOMIO

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2$$

ED EFFETTUIAMO LA DIVISIONE PER $(x-(-1)) = (x+1)$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2 & x+1 \\
\hline
-\cancel{x^5} - x^4 & x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \\
\hline
// \; \cancel{-3x^4} + 0x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2 & \\
\cancel{+3x^4} + 3x^3 & \\
\hline
// \; \cancel{+3x^3} + 0 \cdot x^2 - x + 2 & \\
\cancel{-3x^3} - 3x^2 & \\
\hline
// \; \cancel{-3x^2} - x + 2 & \\
\cancel{+3x^2} + 3x & \\
\hline
// \; \cancel{+2x} \cancel{+2} & \\
\cancel{-2x} \cancel{-2} & \\
\hline
// \quad // &
\end{array}$$

QUINDI

$$\left(x^5-2x^4-x+2\right)=(x+1)\left(\underline{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}\right)$$

ITERIAMO IL PROCEDIMENTO CONSIDERANDO IL QUOZIENTE OTTENUTO COME NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE.

$$P(-1)=(-1)^4-3(-1)^3+3(-1)^2-3(-1)+2=$$
$$=1+3+3+3+2=12$$ NON È RADICE

$$P(+1)=(1)^4-3(1)^3+3(1)^2-3(1)+2=$$
$$=1-\cancel{3}+\cancel{3}-3+2=0$$ +1 È RADICE

DIVIDIAMO ALLORA PER $(x-1)$, CIOÈ:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & -3x^3 & +3x^2 & -3x & +2 & x-1 \\
-\cancel{x^4} & +x^3 & & & & \hline x^3-2x^2+x-2 \\
\hline
// & -\cancel{2x^3} & +3x^2 & -3x & +2 & \\
 & +\cancel{2x^3} & -2x^2 & & & \\
\hline
 & // & \cancel{x^2} & -3x & +2 & \\
 & & -\cancel{x^2} & +x & & \\
\hline
 & & // & -\cancel{2x} & +\cancel{2} & \\
 & & & +\cancel{2x} & -\cancel{2} & \\
\hline
 & & & // & // &
\end{array}$$

QUINDI

$$\left(x^4-3x^3+3x^2-3x+2\right)=(x-1)\left(x^3-2x^2+x-2\right)$$

COSÌ

$$\left(x^5-2x^4-x+2\right)=(x+1)(x-1)\left(\underline{x^3-2x^2+x-2}\right)$$

CONTINUIAMO CONSIDERANDO IL NUOVO QUOZIENTE COME IL NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE

$$P(-1)=(-1)^3-2(-1)^2+(-1)-2=$$
$$=-1-2-1-2=-6$$ NON È RADICE

$$P(1)=(1)^3-2(1)^2+1-2=$$
$$=1-2+1-2=-2$$ NON È RADICE

$$P(-2)=(-2)^3-2(-2)^2+(-2)-2=$$
$$=-8-8-2-2=-20$$ NON È RADICE

$$P(2)=(2)^3-2(2)^2+2-2=$$
$$=8-8+2-2=0$$ 2 È RADICE

DIVIDIAMO ALLORA PER $(x-2)$, CIOÈ:

$$
\begin{array}{cccc|c}
\cancel{x^3} & -\cancel{2x^2} & +x & -2 & x-2 \\ \cline{5-5}
-\cancel{x^3} & +\cancel{2x^2} & & & x^2+1 \\ \cline{1-2}
\text{//} & \text{//} & +\cancel{x} & -\cancel{2} & \\
 & & -\cancel{x} & +\cancel{2} & \\ \cline{3-4}
 & & \text{//} & \text{//} &
\end{array}
$$

QUINDI

$$(x^3-2x^2+x-2)=(x-2)(x^2+1)$$

COSÌ

$$(x^5-2x^4-x+2)=(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+1)$$

A QUESTO PUNTO VISTO CHE L'ULTIMO QUOZIENTE È LA SOMMA DI 2 QUADRATI CHE SAPPIAMO ESSERE UN POLINOMIO NON SCOMPONIBILE PERCHÉ NON AMMETTE RADICI RAZIONALI, LA SCOMPOSIZIONE SI CONCLUDE E CIOÈ:

$$\boxed{(x^5-2x^4-x+2)=(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+1)}$$

ESEMPIO 2

SCOMPONIAMO IL POLINOMIO

$$P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$$

CONSIDERANDO SEMPRE IL RAPPORTO TRA I DIVISORI DEL TERMINE NOTO ED IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO, CERCHIAMO LE SUE EVENTUALI RADICI RAZIONALI PER DETERMINARE IL POLINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO:

$$P(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 - (-1) + 30 =$$
$$= -1 - 6 + 1 + 30 = 24$$ NON È RADICE

$$P(1) = (1)^3 - 6(1)^2 - (1) + 30 =$$
$$= 1 - 6 - 1 + 30 = 24$$ NON È RADICE

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 - (-2) + 30 =$$
$$= -8 - 24 + 2 + 30 = 0$$ -2 È RADICE

COSÌ DIVIDIAMO PER $(x-(-2)) = (x+2)$, CIOÈ:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & -6x^2 & -x & +30 & x+2 \\ \cline{5-5}
-\cancel{x^3} & -2x^2 & & & x^2-8x+15 \\ \cline{1-4}
// & -\cancel{8x^2} & -x & +30 & \\
 & +\cancel{8x^2} & +16x & & \\ \cline{2-3}
 & // & +\cancel{15x} & +\cancel{30} & \\
 & & -\cancel{15x} & -\cancel{30} & \\ \cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}$$

QUINDI

$$(x^3 - 6x^2 - x + 30) = (x+2)(\underline{x^2 - 8x + 15})$$

SCOMPONIAMO ADESSO IL NUOVO QUOZIENTE CERCANDO LE SUE EVENTUALI RADICI RAZIONALI:

$P(2)=(2)^2-8(2)+15=4-16+15=3$ NON È RADICE

$P(-3)=(-3)^2-8(-3)+15=9+24+15=48$ NON È RADICE

$P(3)=(3)^2-8(3)+15=9-24+15=0$ 3 È RADICE

DIVISIAMO COSÌ PER $(x-3)$, CIOÈ:

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^2} & -8x & +15 & x-3 \\
\cline{4-4}
-\cancel{x^2} & +3x & & x-5 \\
\cline{1-3}
// & \cancel{-5x} & \cancel{+15} & \\
 & \cancel{+5x} & \cancel{-15} & \\
\cline{2-3}
 & // & // &
\end{array}
$$

QUINDI

$$\left(x^2-8x+15\right)=(x-3)(x-5)$$

ED ALLORA

$$\boxed{\left(x^3-6x^2-x+30\right)=(x+2)(x-3)(x-5)}$$